



Pompeiu

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
DIMITRIE POMPEIU

Ediția a XI-a, 13-15 mai 2011, Botoșani



CLASA A X-A

Problema 1. *Răutăți compensate.*

- a) Să se arate că $\sqrt{\sqrt{10}-3} + \sqrt{\sqrt{10}+3}$ este număr irațional.
- b) Să se arate că $\sqrt[n]{\sqrt{10}-3} + \sqrt[n]{\sqrt{10}+3}$ este număr irațional, pentru orice număr natural $n \geq 2$.

Gazeta Matematică

Problema 2. *Multe variabile combinate.*

- a) Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$ și $k \in \mathbb{N}, k \leq \min(m; n)$. Arătați că

$$C_{m+n}^k = C_m^0 C_n^k + C_m^1 C_n^{k-1} + \dots + C_m^k C_n^0$$

- b) Dacă m și n sunt numere prime distincte, să se arate că

$$m \cdot n / (C_{m+n}^k - C_m^k - C_n^k),$$

unde $1 \leq k \leq \min(m; n)$.

Problema 3. *Ce știți despre?*

Fie p_1, p_2, \dots, p_k numere prime distincte și $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k$. Pentru o funcție $f : \{1; 2; \dots; n\} \rightarrow \{1; 2; \dots; n\}$, notăm $P_f = f(1) \cdot f(2) \cdot \dots \cdot f(n)$.

- a) Câte funcții au proprietatea că n și P_f sunt numere prime între ele?
- b) Câte funcții au proprietatea că cel mai mare divizor comun al numerelor n și P_f este număr prim?

Problema suplimentară. *Joacă cu lift.*

Un bloc este format din parter și 10 etaje. Să se calculeze câte persoane ar trebui să urce în lift, la parter, astfel ca probabilitatea ca două dintre ele să coboare la același etaj să fie mai mare sau egală cu $\frac{1}{2}$.

Timp de lucru: 3 ore. Fiecare problemă se punctează corespunzător de la 0 la 7 puncte.