



Pompeiu

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
DIMITRIE POMPEIU

Ediția a XI-a, 13-15 mai 2011, Botoșani



CLASA A XI-A

Problema 1. *Matrici răsturnabile.*

a) Fie $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, cu A inversabilă iar $ABA = C + CBA$. Să se arate că $ABC = CBA$.

Gazeta Matematică

b) Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, unde $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, cu proprietatea că $A^2 + B^2 = AB$ și $AB - BA$ este inversabilă. Să se arate că n este multiplu de 3.

Problema 2. *Cu ce seamănă?*

Fie $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă. Dacă f este derivabilă în a și b , iar $f'(a) \cdot f'(b) < 0$, arătați că f are un punct de extrem în intervalul deschis $(a; b)$.

Problema 3. *Intervine a doua?*

Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de două ori derivabilă, cu derivata a doua pozitivă. Să se arate că

$$f(x + f'(x)) \geq f(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Problema suplimentară. *Apucați cum vreți.*

$$\text{Fie } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \cos^2 \frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ \beta & , x = 0 \end{cases}.$$

Să se arate că f are proprietatea lui Darboux pe \mathbb{R} dacă și numai dacă $\beta \in [0; 1]$.

Timp de lucru: 3 ore. Fiecare problemă se punctează corespunzător de la 0 la 7 puncte.