



*Pompeiu*

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ  
*DIMITRIE POMPEIU*

Ediția a XI-a, 13-15 mai 2011, Botoșani



**CLASA A XI-A**

**Problema 1.** *Matrici răsturnabile.*

a) Fie  $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , cu  $A$  inversabilă iar  $ABA = C + CBA$ . Să se arate că  $ABC = CBA$ .

*Gazeta Matematică*

b) Fie  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , unde  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ , cu proprietatea că  $A^2 + B^2 = AB$  și  $AB - BA$  este inversabilă. Să se arate că  $n$  este multiplu de 3.

**Problema 2.** *Cu ce seamănă?*

Fie  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție continuă. Dacă  $f$  este derivabilă în  $a$  și  $b$ , iar  $f'(a) \cdot f'(b) < 0$ , arătați că  $f$  are un punct de extrem în intervalul deschis  $(a; b)$ .

**Problema 3.** *Intervine a doua?*

Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție de două ori derivabilă, cu derivata a doua pozitivă. Să se arate că

$$f(x + f'(x)) \geq f(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

**Problema suplimentară.** *Apucați cum vreți.*

$$\text{Fie } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} \cos^2 \frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ \beta & , x = 0 \end{cases}.$$

Să se arate că  $f$  are proprietatea lui Darboux pe  $\mathbb{R}$  dacă și numai dacă  $\beta \in [0; 1]$ .

*Timp de lucru: 3 ore. Fiecare problemă se punctează corespunzător de la 0 la 7 puncte.*