Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Societatea de Ştiinţe Matematice din Romania

# Olimpiada Naţională de Matematică

## Primul test de selecţie pentru juniori
Iaşi, 8 aprilie 2010

**Problema 1.** Să se determine numerele prime $p$, $q$, $r$ cu proprietatea că:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\geq 1.$$

**Problema 2.** Fie $ABCD$ un patrulater convex cu $\sphericalangle BCD = 120^\circ$, $\sphericalangle CBA = 45^\circ$, $\sphericalangle CBD = 15^\circ$ şi $\sphericalangle CAB = 90^\circ$. Să se arate că $AB = AD$.

**Problema 3.** Fie $ABC$ un triunghi isoscel cu $AB = AC$ şi fie $n$ un număr natural, $n > 1$. Pe latura $AB$ considerăm punctul $M$ astfel încât $n \cdot AM = AB$. Pe latura $BC$ considerăm punctele $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ astfel încât

$$BP_1 = P_1P_2 = P_2P_3 = \ldots = P_{n-1}C = \frac{1}{n}BC.$$

Să se arate că:

$$\sphericalangle MP_1A + \sphericalangle MP_2A + \sphericalangle MP_3A + \cdots + \sphericalangle MP_{n-1}A = \frac{1}{2}\sphericalangle BAC.$$

**Problema 4.** Fie $n$ un număr natural nenul şi numerele întregi nenule $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ cu proprietăţile:
a) $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n = 0$;
b) $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 = \ldots = x_n^2 + y_n^2$.
Să se arate că $n$ este par.

**Problema 5.** Fie $n$ un număr natural, $n \geq 5$. Considerăm $n$ puncte distincte în plan, fiecare colorat sau cu alb, sau cu negru. Pentru fiecare $k$ natural, $1 \leq k < \frac{n}{2}$, o *mutare de tip k* înseamnă selectarea a exact $k$ puncte şi schimbarea culorii acestora. Să se determine valorile lui $n$ pentru care, oricare ar fi $k$ şi indiferent de colorarea iniţială, există o secvenţă finită de mutări de tip $k$, la sfârşitul căreia toate punctele au aceeaşi culoare.

Timp de lucru $4\frac{1}{2}$ ore.
Fiecare problemă este punctată de la 0 la 7 puncte.