CONCURS DE MATEMATICA

ENUNŢURI ŞI PUNCTAJE

1.(8p) Fie x_1 şi x_2 rădăcinile ecuaţiei $x^2 + x + 1 = 0$. Să se calculeze

$$x_1^{2011} + x_2^{2011}.$$

a) 0; b) 1; c) -1; d) 2; e) i.

2.(9p) Să se determine mulţimea valorilor parametrului real m astfel încât

$$\{x \in \mathbb{R} : mx^2 - (m+2)x + m + 2 > 0\} = \emptyset.$$

a) $(\infty, 0) \cup [\frac{2}{3}, \infty]$; b) $[2, \infty)$; c) $(-\infty, -2]$; d) $[\frac{2}{3}, \infty)$; e) $[0, \frac{2}{3}]$.

3.(7p) Se dau punctele $A(3,5)$, $B(-1,3)$, $C(4,1)$. Se cere ecuaţia medianei din C a triunghiului $\overline{ABC}$.

a) $x + y - 5 = 0$; b) $x - y + 4 = 0$; c) $2x + 2y - 1 = 0$; d) $x + y - 4 = 0$;
e) $x + y - 1 = 0$.

4.(7p) Să se calculeze valoarea expresiei

$$E = \frac{sin(x + \frac{\pi}{4}) - cos(x + \frac{\pi}{4})}{sin(x + \frac{\pi}{4}) + cos(x + \frac{\pi}{4})}$$

pentru $x = \frac{\pi}{3}$.

a) $E = 0$; b) $E = 1$; c) $E = \frac{\sqrt{2}}{2}$; d) $E = \frac{\sqrt{3}}{3}$; e) $E = \sqrt{3}$.

5.(8p) Se consideră funcţia $f : (-\infty, 0] \cup [6, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x}$. Să se determine asimptotele la graficul funcţiei.

a) $y = x - 6$ şi $y = -x + 6$; b) $y = x - 3$; c) $y = -x + 3$; d) $y = x - 6$;
e) $y = x - 3$ şi $y = -x + 3$.

6.(9p) În dezvoltarea binomului $(\sqrt{2^{x+1}} + \sqrt{2^{-x}})^n$, suma coeficienţilor binomiali ai primilor trei termeni este egală cu 22. Să se afle toate valorile lui x pentru care suma dintre termenul al treilea şi termenul al cincilea este egală cu 135.

a) $x_1 = 0, x_2 = 1$; b) $x = 1$; c) $x_1 = 1, x_2 = -2$; d) $x_1 = 0, x_2 = -1$;
e) $x = 0$.

Date: 19.03.2011.

7.(8p) Fie $f : [-1, \infty) \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = \sqrt{x+1}$. Să se determine abscisa x_0 a unui punct situat pe graficul lui f în care tangenta la grafic să fie paralelă cu coarda ce uneşte punctele de pe grafic de abscise $x = 3$ şi $x = 8$.

a) $x_0 = \frac{5}{4}$; b) $x_0 = \frac{21}{4}$; c) $x_0 = 5$; d) $x_0 = \frac{31}{4}$; e) $x_0 = 7$.

8.(7p) Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie

$$x \star y = mxy - x - y + 2,$$

unde $m \in \mathbb{R}$. Să se determine valorile lui m pentru care legea admite element neutru.

a) $m = 0$; b) $m = -1$; c) $m = 1$; d) $m = \frac{1}{2}$; e) $m = -\frac{1}{2}$.

9.(8p) Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Să se calculeze A^{2011}.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2011 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; *b)* $\begin{pmatrix} 1 & 2^{2011} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; *c)* $\begin{pmatrix} 1 & 2011^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; *d)* $\begin{pmatrix} 1 & 4022 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

e) $\begin{pmatrix} 1 & 6033 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

10.(10p) Fie $n \geq 1$ natural. Să se determine funcţia derivabilă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât $f(0) = 0$ şi

$$\sum_{k=1}^{n} f(x + 2^k y) - y = nf(x),$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

a) $f(x) = \frac{x^2}{2^n-1} + x$; b) $f(x) = \frac{2^n-1}{2}x$; c) $f(x) = \frac{x}{2^{n+1}-2}$; d) $f(x) = \frac{x}{2^{n+1}-1}$;
e) Niciunul dintre răspunsurile precedente nu e corect.

11.(9p) Să se calculeze integrala

$$I = \int_0^1 \frac{xln(1+x^2)}{x^4+1} dx.$$

a) $\frac{\pi}{8}ln2$; b) $\frac{\pi}{16}ln2$; c) $\frac{\pi}{4}ln2$; d) $\frac{\pi}{2}ln2$; e) 1.

12.(10p) Să se calculeze integrala

$$I = \int_2^4 \frac{(x-2)e^{2x}}{(4-x)e^6 + (x-2)e^{2x}} dx.$$

a) 1; b) 2; c) 3; d) $\frac{1}{2}$; e) $\frac{1}{3}$.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN TIMIŞ

UNIVERSITATEA POLTEHNICA TIMIŞOARA
FACULTATEA DE ELECTRONICĂ ŞI TELECOMUNICAŢII

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ETC^{TM}+ - PROBA 2

ENUNŢURI ŞI PUNCTAJE

1. (13p) Fie $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ o funcţie continuă cu proprietatea că $f(f(x))=x^2$ pentru orice x din $[0,\infty)$. Atunci valoarea integralei $\int_0^1 (2x+1)f(x)dx$ este:

a) 1; b) $\frac{1}{2}$; c) Depinde de funcţia f; d) $\frac{1}{4}$; e) 2.

2. (13p) Dacă F este o primitivă a funcţiei $f:\left[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]\to R$, $f(x)=\frac{x}{\sin x}$, atunci diferenţa $F\left(\frac{2\pi}{3}\right)-F\left(\frac{\pi}{3}\right)$ are valoarea:

a) π; b); $\frac{\pi}{6}\ln 3$ c) $\frac{\pi}{2}\ln 3$; d) $\frac{\pi}{2}$; e) $\ln 3$.

3. (13p) Determinaţi cea mai mare constantă reală c pentru care inegalitatea $\int_0^2 f(x)dx \ge c$ este adevărată pentru orice funcţie continuă $f:R\to R$ cu proprietatea că $f^3(x)+f(x)\ge x$, $\forall x\in R$.

a) 2; b) $\frac{1}{4}$; c) $\frac{3}{4}$; d) $\frac{5}{4}$; e) 1.

4. (13p) Fie $f:R\to R$ o funcţie cu proprietatea $f(f(x))=x+1$, $\forall x\in R$ şi $f(0)=\frac{1}{2}$. Pentru $x,y\in R$ notăm $x*y=f(f(x)+f(y)-1)$. Se cunoaşte că $(R,*)$ este grup abelian izomorf cu $(R,+)$. Atunci pentru $m,n\in Z$ elementul $m*n$ are valoarea:

a) mn; b) $m+n+1$; c) $m+n+\frac{1}{2}$; d) $m+n+\frac{1}{4}$; e) $m+n$.

5. (12p) Fie $A\in M_2(C)$. Pentru $n\in N^*$ notăm $x_n=\det(A^n+I_2)$. Dacă $x_1=x_2=1$, atunci:

a) $x_n\in\{1,2\}$; b) $x_n\in\{1,4\}$; c) $x_n=1$; d) $x_n\in\{1,-1\}$; e) $x_n\in\{0,1\}$.

6. (12p) Pe R se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=(x-1)(y-1)+1$ pentru x şi y reale. Aflaţi n real astfel ca $(-2011)\circ(-2010)\circ\cdots\circ(2011)=2^n-15$

a) 2; b) 8; c) 4; d) 16; e) 32.

7. (12p) Fie $n\in N^*$ şi $(G,\circ)$ un grup finit cu n elemente cu proprietatea că funcţia $f:G\to G$, $f(x)=x^2$ este automorfism. Atunci cardinalul mulţimii G este:

a) 0 b) $2n$; c) $2n+1$; d) n^2; e) $\frac{n(n+1)}{2}$.

8. (12p) Fie $k\in N^*$ şi $f:R\to R$ definită prin $f(x)=e^{-kx^2}$. Dacă $x_k\in(0,1)$ este un punct de inflexiune al lui *f*, atunci :

a) $f(x_k)=\frac{1}{e}$; b) $f(x_k)>\frac{1}{e}$; c) $f(x_k)<\frac{1}{e}$; d) $f(x_k)\in(0,1)$; e) $f(x_k)\in\left(\frac{1}{e},\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$.