

CONCURS DE MATEMATICA

ENUNȚURI ȘI PUNCTAJE

1.(8p) Fie x_1 și x_2 rădăcinile ecuației $x^2 + x + 1 = 0$. Să se calculeze

$$x_1^{2011} + x_2^{2011}.$$

a) 0; b) 1; c) -1; d) 2; e) i .

2.(9p) Să se determine mulțimea valorilor parametrului real m astfel încât

$$\{x \in \mathbb{R} : mx^2 - (m+2)x + m + 2 > 0\} = \emptyset.$$

a) $(\infty, 0) \cup [\frac{2}{3}, \infty]$; b) $[2, \infty)$; c) $(-\infty, -2]$; d) $[\frac{2}{3}, \infty)$; e) $[0, \frac{2}{3}]$.

3.(7p) Se dau punctele $A(3, 5)$, $B(-1, 3)$, $C(4, 1)$. Se cere ecuația medianei din C a triunghiului \overline{ABC} .

a) $x + y - 5 = 0$; b) $x - y + 4 = 0$; c) $2x + 2y - 1 = 0$; d) $x + y - 4 = 0$;
e) $x + y - 1 = 0$.

4.(7p) Să se calculeze valoarea expresiei

$$E = \frac{\sin(x + \frac{\pi}{4}) - \cos(x + \frac{\pi}{4})}{\sin(x + \frac{\pi}{4}) + \cos(x + \frac{\pi}{4})}$$

pentru $x = \frac{\pi}{3}$.

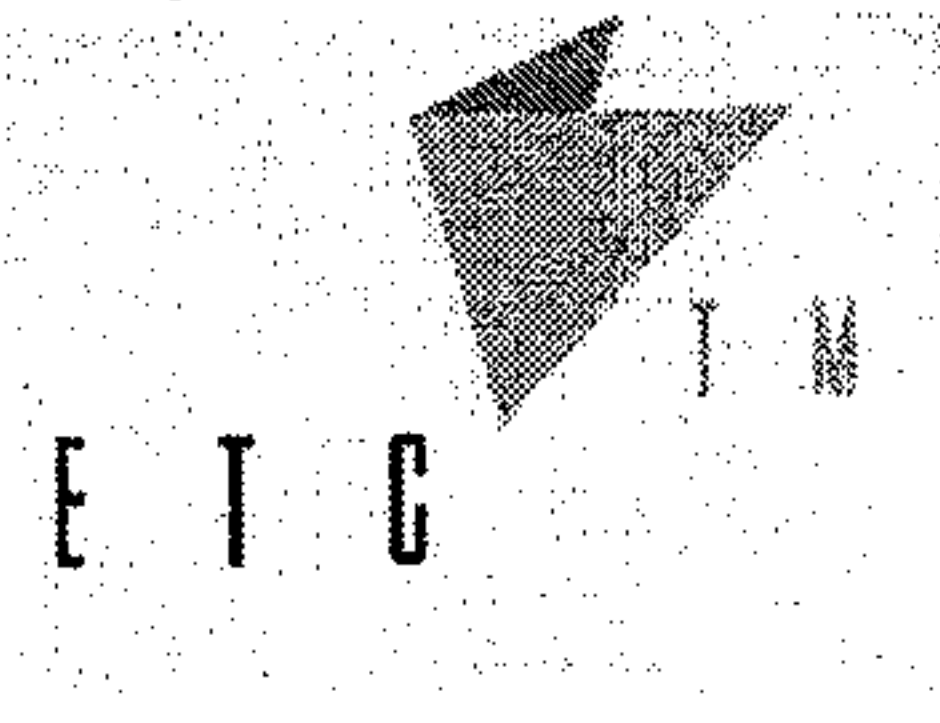
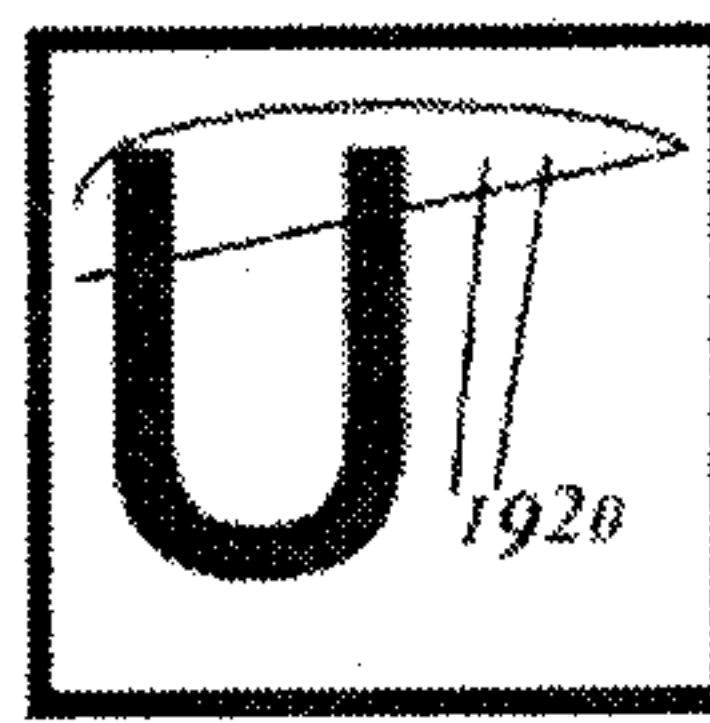
a) $E = 0$; b) $E = 1$; c) $E = \frac{\sqrt{2}}{2}$; d) $E = \frac{\sqrt{3}}{3}$; e) $E = \sqrt{3}$.

5.(8p) Se consideră funcția $f : (-\infty, 0] \cup [6, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x}$. Să se determine asimptotele la graficul funcției.

a) $y = x - 6$ și $y = -x + 6$; b) $y = x - 3$; c) $y = -x + 3$; d) $y = x - 6$;
e) $y = x - 3$ și $y = -x + 3$.

6.(9p) În dezvoltarea binomului $(\sqrt{2^{x+1}} + \sqrt{2^{-x}})^n$, suma coeficienților binomiali ai primilor trei termeni este egală cu 22. Să se afle toate valorile lui x pentru care suma dintre termenul al treilea și termenul al cincilea este egală cu 135.

a) $x_1 = 0, x_2 = 1$; b) $x = 1$; c) $x_1 = 1, x_2 = -2$; d) $x_1 = 0, x_2 = -1$;
e) $x = 0$.



7.(8p) Fie $f : [-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = \sqrt{x+1}$. Să se determine abscisa x_0 a unui punct situat pe graficul lui f în care tangenta la grafic să fie paralelă cu coarda ce unește punctele de pe grafic de abscise $x = 3$ și $x = 8$.

- a) $x_0 = \frac{5}{4}$; b) $x_0 = \frac{21}{4}$; c) $x_0 = 5$; d) $x_0 = \frac{31}{4}$; e) $x_0 = 7$.

8.(7p) Pe \mathbb{R} se definește legea de compoziție

$$x \star y = mxy - x - y + 2,$$

unde $m \in \mathbb{R}$. Să se determine valorile lui m pentru care legea admite element neutru.

- a) $m = 0$; b) $m = -1$; c) $m = 1$; d) $m = \frac{1}{2}$; e) $m = -\frac{1}{2}$.

9.(8p) Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Să se calculeze A^{2011} .

- a) $\begin{pmatrix} 1 & 2011 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 2^{2011} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 2011^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1 & 4022 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;
e) $\begin{pmatrix} 1 & 6033 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

10.(10p) Fie $n \geq 1$ natural. Să se determine funcția derivabilă $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $f(0) = 0$ și

$$\sum_{k=1}^n f(x + 2^k y) - y = nf(x),$$

pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

- a) $f(x) = \frac{x^2}{2^n - 1} + x$; b) $f(x) = \frac{2^n - 1}{2} x$; c) $f(x) = \frac{x}{2^{n+1} - 2}$; d) $f(x) = \frac{x}{2^{n+1} - 1}$;
e) Niciunul dintre răspunsurile precedente nu e corect.

11.(9p) Să se calculeze integrala

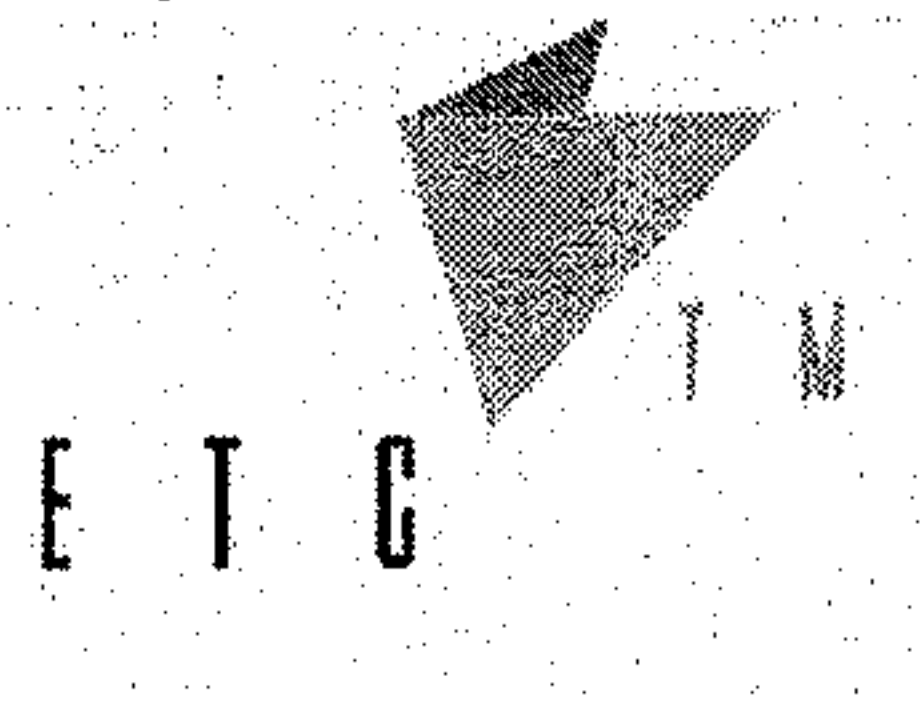
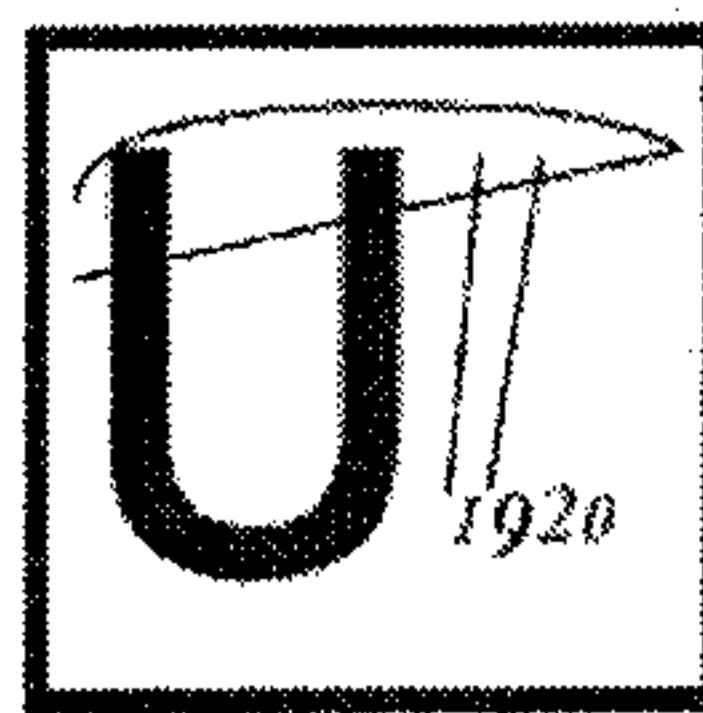
$$I = \int_0^1 \frac{x \ln(1+x^2)}{x^4 + 1} dx.$$

- a) $\frac{\pi}{8} \ln 2$; b) $\frac{\pi}{16} \ln 2$; c) $\frac{\pi}{4} \ln 2$; d) $\frac{\pi}{2} \ln 2$; e) 1.

12.(10p) Să se calculeze integrala

$$I = \int_2^4 \frac{(x-2)e^{2x}}{(4-x)e^6 + (x-2)e^{2x}} dx.$$

- a) 1; b) 2; c) 3; d) $\frac{1}{2}$; e) $\frac{1}{3}$.



CONCURSUL DE MATEMATICĂ ETCTM - PROBA 2
ENUNȚURI ȘI PUNCTAJE

1. (13p) Fie $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ o funcție continuă cu proprietatea că $f(f(x)) = x^2$ pentru orice x din $[0, \infty)$. Atunci valoarea integralei $\int_0^1 (2x+1)f(x)dx$ este:
- a) 1; b) $\frac{1}{2}$; c) Depinde de funcția f ; d) $\frac{1}{4}$; e) 2.
2. (13p) Dacă F este o primitivă a funcției $f: \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{\sin x}$, atunci diferența $F\left(\frac{2\pi}{3}\right) - F\left(\frac{\pi}{3}\right)$ are valoarea:
- a) π ; b); $\frac{\pi}{6} \ln 3$ c) $\frac{\pi}{2} \ln 3$; d) $\frac{\pi}{2}$; e) $\ln 3$.
3. (13p) Determinați cea mai mare constantă reală c pentru care inegalitatea $\int_0^2 f(x)dx \geq c$ este adevărată pentru orice funcție continuă $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că $f^3(x) + f(x) \geq x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- a) 2; b) $\frac{1}{4}$; c) $\frac{3}{4}$; d) $\frac{5}{4}$; e) 1.
4. (13p) Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea $f(f(x)) = x+1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ și $f(0) = \frac{1}{2}$. Pentru $x, y \in \mathbb{R}$ notăm $x * y = f(f(x) + f(y) - 1)$. Se cunoaște că $(\mathbb{R}, *)$ este grup abelian izomorf cu $(\mathbb{R}, +)$. Atunci pentru $m, n \in \mathbb{Z}$ elementul $m * n$ are valoarea:
- a) mn ; b) $m+n+1$; c) $m+n+\frac{1}{2}$; d) $m+n+\frac{1}{4}$; e) $m+n$.
5. (12p) Fie $A \in M_2(\mathbb{C})$. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ notăm $x_n = \det(A^n + I_2)$. Dacă $x_1 = x_2 = 1$, atunci:
- a) $x_n \in \{1, 2\}$; b) $x_n \in \{1, 4\}$; c) $x_n = 1$; d) $x_n \in \{1, -1\}$; e) $x_n \in \{0, 1\}$.
6. (12p) Pe \mathbb{R} se definește legea de compoziție $x \circ y = (x-1)(y-1)+1$ pentru x și y reale. Aflați n real astfel ca $(-2011) \circ (-2010) \circ \dots \circ (2011) = 2^n - 15$
- a) 2; b) 8; c) 4; d) 16; e) 32.
7. (12p) Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și (G, \circ) un grup finit cu n elemente cu proprietatea că funcția $f: G \rightarrow G$, $f(x) = x^2$ este automorfism. Atunci cardinalul mulțimii G este:
- a) 0 b) $2n$; c) $2n+1$; d) n^2 ; e) $\frac{n(n+1)}{2}$.
8. (12p) Fie $k \in \mathbb{N}^*$ și $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = e^{-kx^2}$. Dacă $x_k \in (0, 1)$ este un punct de inflexiune al lui f , atunci :
- a) $f(x_k) = \frac{1}{e}$; b) $f(x_k) > \frac{1}{e}$; c) $f(x_k) < \frac{1}{e}$; d) $f(x_k) \in (0, 1)$; e) $f(x_k) \in \left(\frac{1}{e}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$.