

## CONCURS DE MATEMATICA

### ENUNȚURI ȘI PUNCTAJE

1.(8p) Fie  $x_1$  și  $x_2$  rădăcinile ecuației  $x^2 + x + 1 = 0$ . Să se calculeze

$$x_1^{2011} + x_2^{2011}.$$

a) 0;      b) 1;      c) -1;      d) 2;      e)  $i$ .

2.(9p) Să se determine mulțimea valorilor parametrului real  $m$  astfel încât

$$\{x \in \mathbb{R} : mx^2 - (m+2)x + m + 2 > 0\} = \emptyset.$$

a)  $(\infty, 0) \cup [\frac{2}{3}, \infty]$ ;    b)  $[2, \infty)$ ;    c)  $(-\infty, -2]$ ;    d)  $[\frac{2}{3}, \infty)$ ;    e)  $[0, \frac{2}{3}]$ .

3.(7p) Se dau punctele  $A(3, 5)$ ,  $B(-1, 3)$ ,  $C(4, 1)$ . Se cere ecuația medianei din  $C$  a triunghiului  $\overline{ABC}$ .

a)  $x + y - 5 = 0$ ;    b)  $x - y + 4 = 0$ ;    c)  $2x + 2y - 1 = 0$ ;    d)  $x + y - 4 = 0$ ;  
e)  $x + y - 1 = 0$ .

4.(7p) Să se calculeze valoarea expresiei

$$E = \frac{\sin(x + \frac{\pi}{4}) - \cos(x + \frac{\pi}{4})}{\sin(x + \frac{\pi}{4}) + \cos(x + \frac{\pi}{4})}$$

pentru  $x = \frac{\pi}{3}$ .

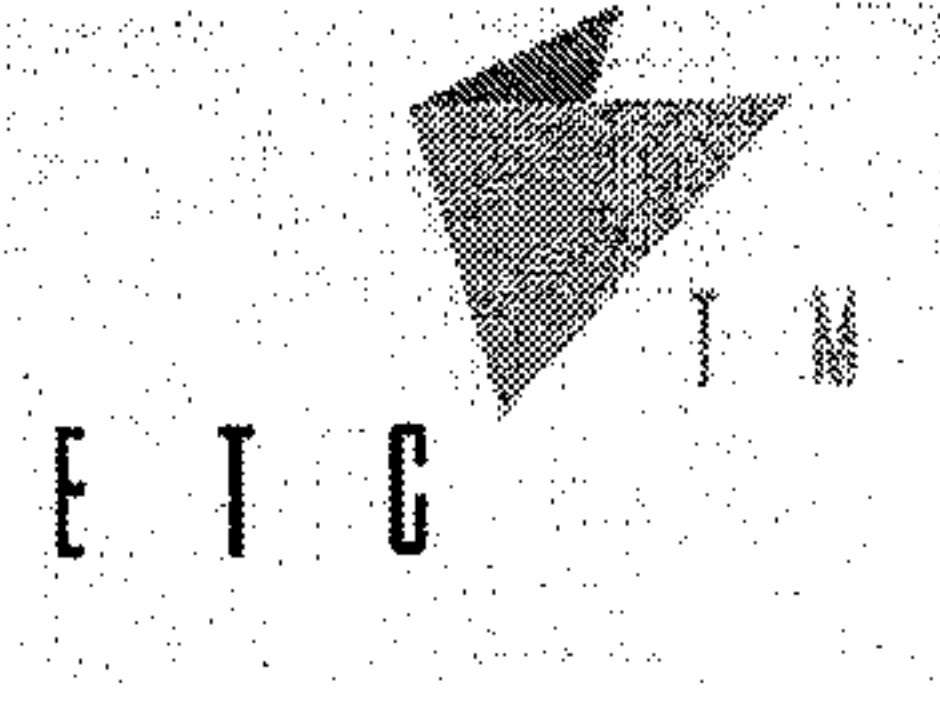
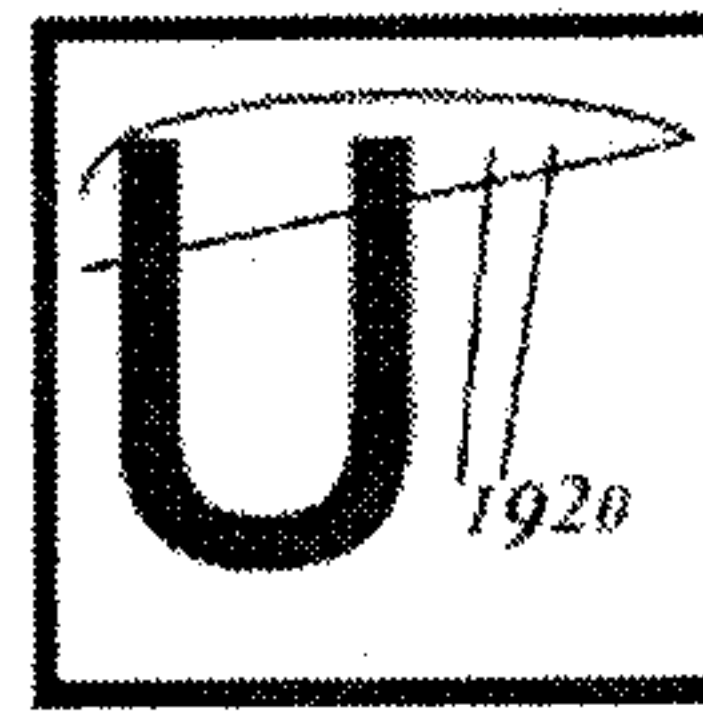
a)  $E = 0$ ;    b)  $E = 1$ ;    c)  $E = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ;    d)  $E = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ;    e)  $E = \sqrt{3}$ .

5.(8p) Se consideră funcția  $f : (-\infty, 0] \cup [6, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x}$ . Să se determine asimptotele la graficul funcției.

a)  $y = x - 6$  și  $y = -x + 6$ ;    b)  $y = x - 3$ ;    c)  $y = -x + 3$ ;    d)  $y = x - 6$ ;  
e)  $y = x - 3$  și  $y = -x + 3$ .

6.(9p) În dezvoltarea binomului  $(\sqrt{2^{x+1}} + \sqrt{2^{-x}})^n$ , suma coeficienților binomiali ai primilor trei termeni este egală cu 22. Să se afle toate valorile lui  $x$  pentru care suma dintre termenul al treilea și termenul al cincilea este egală cu 135.

a)  $x_1 = 0, x_2 = 1$ ;    b)  $x = 1$ ;    c)  $x_1 = 1, x_2 = -2$ ;    d)  $x_1 = 0, x_2 = -1$ ;  
e)  $x = 0$ .



7.(8p) Fie  $f : [-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , definită prin  $f(x) = \sqrt{x+1}$ . Să se determine abscisa  $x_0$  a unui punct situat pe graficul lui  $f$  în care tangenta la grafic să fie paralelă cu coarda ce unește punctele de pe grafic de abscise  $x = 3$  și  $x = 8$ .

- a)  $x_0 = \frac{5}{4}$ ;      b)  $x_0 = \frac{21}{4}$ ;      c)  $x_0 = 5$ ;      d)  $x_0 = \frac{31}{4}$ ;      e)  $x_0 = 7$ .

8.(7p) Pe  $\mathbb{R}$  se definește legea de compoziție

$$x \star y = mxy - x - y + 2,$$

unde  $m \in \mathbb{R}$ . Să se determine valorile lui  $m$  pentru care legea admite element neutru.

- a)  $m = 0$ ;      b)  $m = -1$ ;      c)  $m = 1$ ;      d)  $m = \frac{1}{2}$ ;      e)  $m = -\frac{1}{2}$ .

9.(8p) Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Să se calculeze  $A^{2011}$ .

- a)  $\begin{pmatrix} 1 & 2011 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ;      b)  $\begin{pmatrix} 1 & 2^{2011} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ;      c)  $\begin{pmatrix} 1 & 2011^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ;      d)  $\begin{pmatrix} 1 & 4022 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ;  
e)  $\begin{pmatrix} 1 & 6033 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

10.(10p) Fie  $n \geq 1$  natural. Să se determine funcția derivabilă  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  astfel încât  $f(0) = 0$  și

$$\sum_{k=1}^n f(x + 2^k y) - y = nf(x),$$

pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}$ .

- a)  $f(x) = \frac{x^2}{2^n - 1} + x$ ;      b)  $f(x) = \frac{2^n - 1}{2} x$ ;      c)  $f(x) = \frac{x}{2^{n+1} - 2}$ ;      d)  $f(x) = \frac{x}{2^{n+1} - 1}$ ;  
e) Niciunul dintre răspunsurile precedente nu e corect.

11.(9p) Să se calculeze integrala

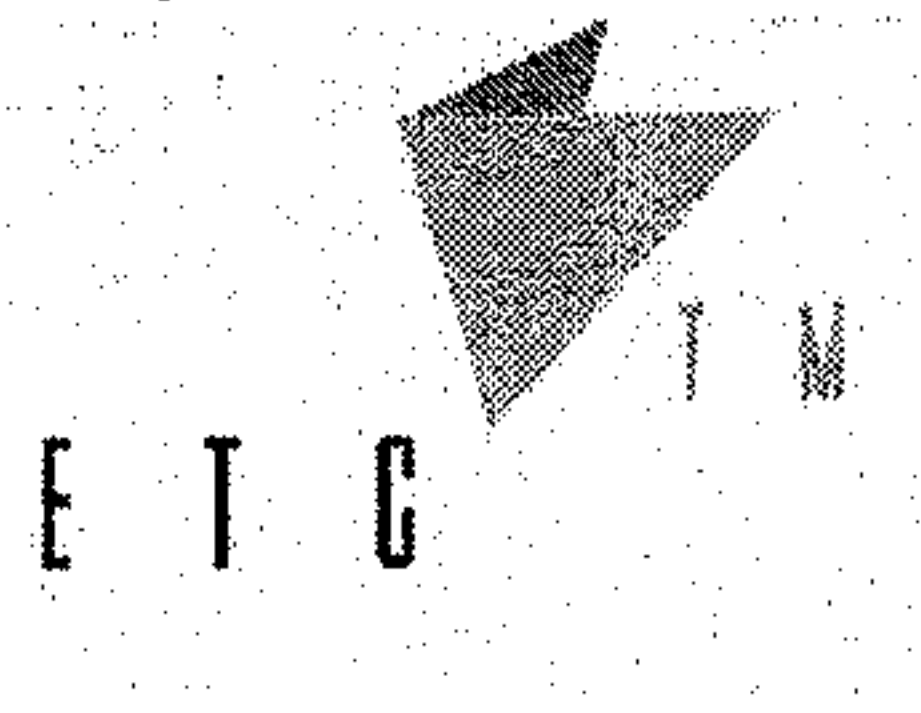
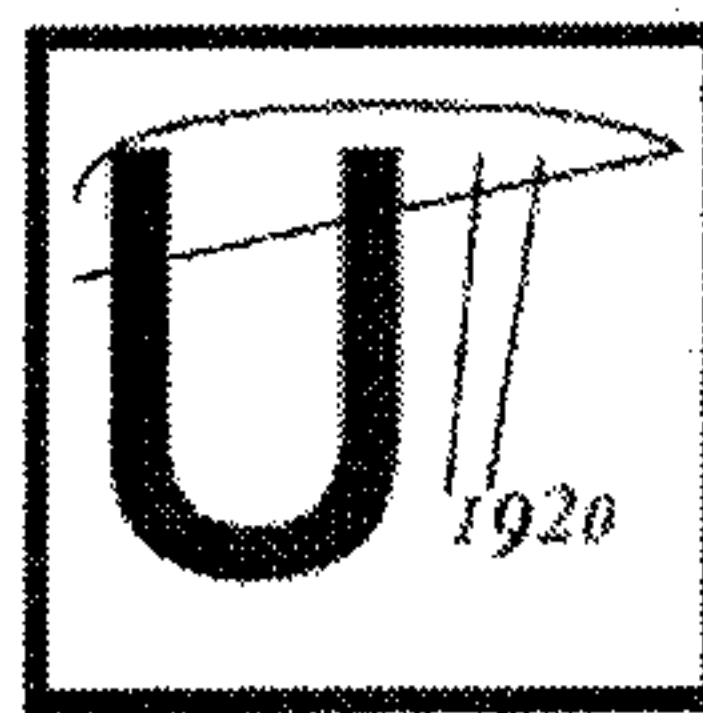
$$I = \int_0^1 \frac{x \ln(1+x^2)}{x^4 + 1} dx.$$

- a)  $\frac{\pi}{8} \ln 2$ ;      b)  $\frac{\pi}{16} \ln 2$ ;      c)  $\frac{\pi}{4} \ln 2$ ;      d)  $\frac{\pi}{2} \ln 2$ ;      e) 1.

12.(10p) Să se calculeze integrala

$$I = \int_2^4 \frac{(x-2)e^{2x}}{(4-x)e^6 + (x-2)e^{2x}} dx.$$

- a) 1;      b) 2;      c) 3;      d)  $\frac{1}{2}$ ;      e)  $\frac{1}{3}$ .



**CONCURSUL DE MATEMATICĂ ETC<sup>TM</sup> - PROBA 2**  
**ENUNȚURI ȘI PUNCTAJE**

1. (13p) Fie  $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  o funcție continuă cu proprietatea că  $f(f(x)) = x^2$  pentru orice  $x$  din  $[0, \infty)$ . Atunci valoarea integralei  $\int_0^1 (2x+1)f(x)dx$  este:
- a) 1;      b)  $\frac{1}{2}$ ;      c) Depinde de funcția  $f$ ;      d)  $\frac{1}{4}$ ;      e) 2.
2. (13p) Dacă  $F$  este o primitivă a funcției  $f: \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x}{\sin x}$ , atunci diferența  $F\left(\frac{2\pi}{3}\right) - F\left(\frac{\pi}{3}\right)$  are valoarea:
- a)  $\pi$ ;      b);  $\frac{\pi}{6} \ln 3$       c)  $\frac{\pi}{2} \ln 3$ ;      d)  $\frac{\pi}{2}$ ;      e)  $\ln 3$ .
3. (13p) Determinați cea mai mare constantă reală  $c$  pentru care inegalitatea  $\int_0^2 f(x)dx \geq c$  este adevărată pentru orice funcție continuă  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  cu proprietatea că  $f^3(x) + f(x) \geq x$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .
- a) 2;      b)  $\frac{1}{4}$ ;      c)  $\frac{3}{4}$ ;      d)  $\frac{5}{4}$ ;      e) 1.
4. (13p) Fie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție cu proprietatea  $f(f(x)) = x+1$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$  și  $f(0) = \frac{1}{2}$ . Pentru  $x, y \in \mathbb{R}$  notăm  $x * y = f(f(x) + f(y) - 1)$ . Se cunoaște că  $(\mathbb{R}, *)$  este grup abelian izomorf cu  $(\mathbb{R}, +)$ . Atunci pentru  $m, n \in \mathbb{Z}$  elementul  $m * n$  are valoarea:
- a)  $mn$ ;      b)  $m+n+1$ ;      c)  $m+n+\frac{1}{2}$ ;      d)  $m+n+\frac{1}{4}$ ;      e)  $m+n$ .
5. (12p) Fie  $A \in M_2(\mathbb{C})$ . Pentru  $n \in \mathbb{N}^*$  notăm  $x_n = \det(A^n + I_2)$ . Dacă  $x_1 = x_2 = 1$ , atunci:
- a)  $x_n \in \{1, 2\}$ ;      b)  $x_n \in \{1, 4\}$ ;      c)  $x_n = 1$ ;      d)  $x_n \in \{1, -1\}$ ;      e)  $x_n \in \{0, 1\}$ .
6. (12p) Pe  $\mathbb{R}$  se definește legea de compoziție  $x \circ y = (x-1)(y-1)+1$  pentru  $x$  și  $y$  reale. Aflați  $n$  real astfel ca  $(-2011) \circ (-2010) \circ \dots \circ (2011) = 2^n - 15$
- a) 2;      b) 8;      c) 4;      d) 16;      e) 32.
7. (12p) Fie  $n \in \mathbb{N}^*$  și  $(G, \circ)$  un grup finit cu  $n$  elemente cu proprietatea că funcția  $f: G \rightarrow G$ ,  $f(x) = x^2$  este automorfism. Atunci cardinalul mulțimii  $G$  este:
- a) 0      b)  $2n$ ;      c)  $2n+1$ ;      d)  $n^2$ ;      e)  $\frac{n(n+1)}{2}$ .
8. (12p) Fie  $k \in \mathbb{N}^*$  și  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definită prin  $f(x) = e^{-kx^2}$ . Dacă  $x_k \in (0, 1)$  este un punct de inflexiune al lui  $f$ , atunci :
- a)  $f(x_k) = \frac{1}{e}$ ;      b)  $f(x_k) > \frac{1}{e}$ ;      c)  $f(x_k) < \frac{1}{e}$ ;      d)  $f(x_k) \in (0, 1)$ ;      e)  $f(x_k) \in \left(\frac{1}{e}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ .