

Clasa a XII - a.

1. Fie $0 < a < b$. Să se arate că:

$$4(b^3 - a^3) \cdot \int_a^b \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx > 3 \left(\ln \frac{b^2 + 1}{a^2 + 1} \right)^2.$$

Constantin Ruiu, G.M.

2. Fie $K \subseteq \mathbb{R}$ un corp în care operațiile sunt cele induse din \mathbb{R} și astfel încât pentru orice $a \in K \setminus \mathbb{Q}$, există $b \in K \setminus \mathbb{Q}$ pentru care $a + b \in \mathbb{Q}$ și $ab \in \mathbb{Q}$. Să se demonstreze că există $d \in \mathbb{N}$, liber de pătrate, astfel încât:

$$K = \mathbb{Q}(\sqrt{d}) \stackrel{\text{def.}}{=} \{x + y\sqrt{d} \mid x, y \in \mathbb{Q}\}.$$

Marcel Tena

3. Să se arate că rădăcinile polinomului

$$f = X^5 - 4X^4 + aX^3 + bX^2 + 2X + c \in \mathbb{C}[X]$$

nu pot avea același modul.

I. C. Drăghicescu