CLASA a IX-a

„Introducere în simetrie. Simetrie în introducere”.

1) *În triunghiul ABC, fie M şi N două puncte ale dreptei AB, simetrice faţă de mijlocul segmentului $[AB]$, iar P şi Q două puncte ale dreptei AC, simetrice faţă de mijlocul segmentului $[AC]$. Notăm cu X, Y şi Z mijloacele segmentelor $[MQ]$, $[BC]$ şi respectiv $[NP]$. Să se arate că $AXYZ$ este un paralelogram.*

"Problemele de minim şi de maxim mă atrag pentru că ele idealizează pro - blemele noastre zilnice." - George Polya

2) *Fie patrulaterul convex $ABCD$, O un punct variabil, $O \in [AC]$, $OM \parallel BC$, $M \in AB$, $ON \parallel AB$, $N \in BC$, $OP \parallel AD$, $P \in CD$ şi $OQ \parallel CD, Q \in DA$. Să se arate că:*

$$\min\left\{S_{[ABD]}, S_{[BCD]}\right\} \leq S_{[MNPQ]} \leq \max\left\{S_{[ABD]}, S_{[BCD]}\right\}.$$

(*Prin $S_{[XYZ]}$ înţelegem aria triunghiului XYZ*).

"Matematica este guvernată de inegalităţi, egalitatea ar fi mai degrabă un caz particular." - George Polya

3) *Fie b, c lungimile catetelor şi a lungimea ipotenuzei unui triunghi dreptunghic. Să se arate că:*

$$\left(\frac{b}{a}\right)^n + \left(\frac{c}{a}\right)^n \geq \frac{2}{\left(\sqrt{2}\right)^n}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

(*Se cunoaşte inegalitatea* $\frac{x^{m+n}+y^{m+n}}{2} \geq \frac{x^m+y^m}{2} \cdot \frac{x^n+y^n}{2}$, $\forall m, n \in \mathbb{N}$, $\forall x, y > 0$).