Clasa a VIII-a

1) *Fie* $ABCDA'B'C'D'$ *un cub cu muchiile de lungime 12, iar punctele* M *şi* N *sunt situate pe segmentele* BB' *şi* DD' *astfel încât*

$$\frac{BM}{BB'} = \frac{1}{4} \text{ şi } \frac{DN}{DD'} = \frac{2}{3}.$$

Să se determine aria secţiunii determinate de planul (AMN) *în cubul dat.*

Cătălin Barbu, Bacău

Fie $BB" \parallel AN, B" \in (CC'), MP \parallel BB", P \in (CC')$. Patrulaterul $BMPB"$ este paralelogram, deci $MP = BB" = AN = 4\sqrt{13}$. Avem

$$S_{ABCD} = S_{AMPN} \cdot \cos\varphi$$

unde φ este unghiul diedru dintre planele (ABC) şi (AMN). Fie $\{E\} = MP \cap BC, MQ \perp AE$,

$$AE = \sqrt{12^2 + \frac{9^2}{4}} = \frac{3\sqrt{73}}{2}$$

$$BQ = \frac{AB \cdot BE}{AE} = \frac{12 \cdot \frac{9}{2}}{\frac{3\sqrt{73}}{2}} = \frac{36}{\sqrt{73}}$$

$$MQ = \sqrt{9 + \frac{36^2}{73}} = 3\sqrt{\frac{217}{73}}$$

Din triunghiul BMQ rezultă

$$\cos\varphi = \frac{BQ}{MQ} = \frac{36}{\sqrt{73}} \cdot \frac{\sqrt{73}}{3\sqrt{217}} = \frac{12}{\sqrt{217}}$$

$$S_{AMPN} = \frac{S_{ABCD}}{\cos\varphi} = \frac{12^2 \cdot \sqrt{217}}{12} = 12\sqrt{217}$$

2) *Fie* ABC *un triunghi dreptunghic. Considerăm punctele* $D \in AB, E \in AC$ *astfel încât* $\widehat{AED} \equiv \widehat{ABC}$ *şi punctele* $F, G \in (BC)$ *şi* $H \in (AC)$, $K \in (AB)$ *astfel încât* FH *şi* GK *sunt perpendiculare pe* BC. *Demonstraţi că punctele* D, E, F, G, H, K *sunt conciclice dacă şi numai dacă* $DE \equiv FH \equiv GK$.

Ion Patraşcu, Craiova

Rezolvare. Patrulaterul $HFGK$ este dreptunghi $(HF \|= GK, HF \perp FG)$. Notăm $\{O\} = FK \cap GH$, avem

$$OF = OH = OG = OK \tag{1}$$

şi $m(\measuredangle FHC) = 90^\circ - m(\measuredangle C) = m(\measuredangle B)$. Prin urmare: $\sphericalangle FHC \equiv \sphericalangle AED$. Notăm $\{Q\} = ED \cap HF$, de unde $QE = QH$; dar $HF = DE$, deci $QD = QF$, cu consecinţa: $\sphericalangle QFD = \sphericalangle QDF$ ceea ce implica $FD \parallel HE$, deci $FD \perp DK$. In triunghiul dreptunghic FDK, DO este mediană, deci

$$DO = FO = OK \tag{2}$$

$\measuredangle EDA \equiv \measuredangle GKB$ (au acelasi complement $\measuredangle B$) şi $\measuredangle EDK \equiv GKD$. Avem ca $\triangle EDK \equiv \triangle GKD$ $(L.U.L) => EK = GD$. Notam $\{O_2\} = DG \cap EK$. Din congruenta $\sphericalangle O_2DK = \sphericalangle O_2KE$ rezultă că $\triangle O_2DK$ este isoscel, deci $O_2G = O_2E$ şi $\sphericalangle O_2GE = \sphericalangle O_2DK$,ceea ce implica

$$GE \parallel DK.$$

Obtinem ca $GE \perp AC$, deci $\triangle GEH$ este dreptunghic, OE mediană rezultă

$$OE = OH = OG \tag{3}$$

Din (1), (2) şi (3) rezultă că punctul O este egal departat de punctele D, E, F, G, H, K.

Reciproc, dacă punctele sunt conciclice, rezultă că $HFGK$ este dreptunghi; notăm cu O centrul său. Vom avea

$$OH = OF = OG = OK = OD = OE.$$

Deoarece $\sphericalangle AED \equiv \sphericalangle B$ şi $\sphericalangle CHF \equiv \sphericalangle B$, rezultă $\sphericalangle AED \equiv \sphericalangle CHF$ şi că cercul de centru O va avea $(HD) = (EF)$, cu consecinţa: patrulaterul $DFEH$ este trapez isoscel,asa ca $(DE) = (FH)$. Pe de alta parte $(FH) = (GK)$, deci $(DE) = (FH) = (GK)$.

3) *Două mulţimi de câte trei puncte se numesc "mulţimi asemenea" dacă şi numai dacă există două triunghiuri asemenea, unul cu vârfurile din prima mulţime, iar celălalt cu vârfurile din a doua mulţime. Fie punctele necoliniare A, B, C, iar $D \in (BC)$.*

a) Dacă mulţimile $\{A, B, D\}$ şi $\{A, B, C\}$ sunt mulţimi "asemenea", atunci $AB^2 = BC \cdot BD$.

b) Dacă perechile de mulţimi $\{A, B, D\}$ şi $\{A, B, C\}$, respectiv $\{A, C, D\}$ şi $\{A, B, C\}$, sunt simultan "mulţimi asemenea", atunci triunghiul ABC este dreptunghic.

Ovidiu Pop, Satu Mare

Soluţie. Deoarece $\measuredangle ADB$ este exterior triunghiului ADC, avem

$$m(\measuredangle ADB) > m(\measuredangle ACB). \tag{1}$$

Deoarece $D \in (BC)$, rezultă că

$$m(\measuredangle BAD) < m(\measuredangle BAC) \tag{2}$$

Ţinând seama de (1) şi (2), mulţimile $\{A, B, D\}$ şi $\{A, B, C\}$ sunt "mulţimi asemenea" dacă şi numai dacă 1. $\triangle DAB \sim \triangle ABC$ sau 2. $\triangle DAB \sim \triangle ACB$ sau 3. $\triangle DAB \sim \triangle BCA$.

Cazul 1. Dacă $\triangle DAB \sim \triangle ABC$ rezulta că $\measuredangle ABD \equiv \measuredangle BCA$, deci triunghiul ABC este isoscel cu $AB \equiv AC$. Pe de altă parte, din asemănarea triunghiurilor rezultă că

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DB}{AC},$$

de unde obţinem că $AB^2 = BC \cdot BD$.

Cazul 2. Dacă $\triangle DAB \sim \triangle ACB$, atunci $\frac{AB}{CB} = \frac{DB}{AB}$, de unde $AB^2 = BC \cdot BD$.

Cazul 3. Dacă $\triangle DAB \sim \triangle BCA$ rezultă că $\measuredangle ABD \equiv \measuredangle CAB$, deci triunghiul ABC este isoscel cu $CA = CB$. Din asemănarea triunghiurilor rezultă că

$$\frac{AB}{CA} = \frac{BD}{AB}$$

deci,

$$AB^2 = BC \cdot BD.$$

Din cazurile 1-3 rezultă a).

Deoarece mulţimile $\{A, B, D\}$ şi $\{A, B, C\}$, respectiv $\{A, C, D\}$ şi $\{A, B, C\}$ sunt "mulţimi asemenea", conform lui a) avem $AB^2 = BC \cdot BD$ şi $AC^2 = BC \cdot CD$, de unde prin adunare obţinem că

$$AB^2 + AC^2 = BC^2.$$

Conform reciprocei teoremei lui Pitagora, rezultă că triunghiul ABC este dreptunghic în A.