

Clasa a X-a

"Triunghiul perfect!"

1) Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ distincte astfel încât $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ și

$$\frac{z_1^2}{z_2 \cdot z_3} + \frac{z_2^2}{z_3 \cdot z_1} + \frac{z_3^2}{z_1 \cdot z_2} = 3.$$

Arătați că z_1, z_2, z_3 sunt afixele vârfurilor unui triunghi echilateral.

"O problemă cu raze!"

2) Să se arate că în orice triunghi ABC are loc relația:

$$(h_a - r)(h_b - r)(h_c - r) \leq 4Rr^2,$$

unde h_a, h_b, h_c sunt lungimile înălțimilor, R este raza cercului circumscris, iar r este raza cercului înscris în triunghiul ABC .

"Se desenează pe nisip un cerc / după care se taie în două..."

După aceea se izbește cu fruntea nisipul / și i se cere iertare cercului"

- Nichita Stănescu

3) Fie O, I, H centrul cercului circumscris, centrul cercului înscris, respectiv ortocentrul unui triunghi ABC , D un punct situat în interiorul triunghiului ABC astfel încât

$$BC \cdot DA = AC \cdot DB = AB \cdot DC.$$

Arătați că punctele A, B, D, O, I, H sunt conciclice dacă și numai dacă

$$m(\angle C) = 60^\circ.$$