Clasa a X-a

"Triunghiul perfect!"

1) *Fie* $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ *distincte astfel încât* $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ *şi*

$$\frac{z_1^2}{z_2 \cdot z_3} + \frac{z_2^2}{z_3 \cdot z_1} + \frac{z_3^2}{z_1 \cdot z_2} = 3.$$

Arătaţi că $z_{1,}z_2, z_3$ *sunt afixele vârfurilor unui triunghi echilateral.*

"O problemă cu raze!"

2) *Să se arate că în orice triunghi* ABC *are loc relaţia*:

$$(h_a - r)(h_b - r)(h_c - r) \leq 4Rr^2,$$

unde h_a, h_b, h_c *sunt lungimile înălţimilor,* R *este raza cercului circumscris, iar* r *este raza cercului înscris în triunghiul* ABC*.*

"Se desenează pe nisip un cerc / după care se taie în două...
După aceea se izbeşte cu fruntea nisipul / şi i se cere iertare cercului"
- Nichita Stănescu

3) *Fie* O, I, H *centrul cercului circumscris, centrul cercului înscris, respectiv ortocentrul unui triunghi* ABC*,* D *un punct situat în interiorul triunghiului* ABC *astfel încât*

$$BC \cdot DA = AC \cdot DB = AB \cdot DC.$$

Arătaţi că punctele A, B, D, O, I, H *sunt conciclice dacă şi numai dacă*

$$m(\measuredangle C) = 60^\circ.$$