CONCURSUL DE MATEMATICĂ FLORICA T. CÂMPAN

ETAPA INTERJUDEȚEANĂ, 26 MARTIE 2011

CLASA A VI-A (DE MIJLOC)

SUBIECTUL I TURNURI

Pe o tablă de șah 8×8 se așază 8 turnuri astfel încât niciunul să nu le atace pe celelalte.
a) Arătați că un astfel de aranjament este posibil.
b) Pentru un astfel de aranjament de turnuri pe tablă, să se arate că în orice pătrat 5×5 de pe tablă există cel puțin două turnuri.

Soluție. (oficiu **2p**) a) Pe fiecare linie și pe fiecare coloană există exact un turn. **5p**
b) Rămân în afara pătratului 5×5, trei linii pe care sunt trei turnuri. **2p**
Rămăn în afara pătratului trei coloane pe care sunt cel mult trei turnuri. **3p**
În afara pătratului sunt cel mult 6 turnuri (deci în pătratul 5×5 sunt cel puțin două turnuri). **3p**

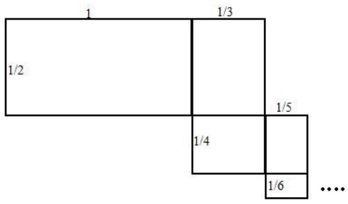
SUBIECTUL II ALEGERE DE NUMERE

Arătați că pot fi alese cel mult 671 numere din mulțimea $A = \{1, 2, 3, ...2011\}$, astfel încât diferența oricăror două numere alese să nu dividă suma acestora.

Soluție. (oficiu **2p**) Observăm că mulțimea A conține exact 671 numere de forma $\mathcal{M}_3 + 1$. Este evident că cele 671 de numere de această formă (adică 1, 4, 7, … 2011) verifică cerințele problemei, deoarece diferența oricăror două astfel de numere este $\mathcal{M}_3$, iar suma lor este de forma $\mathcal{M}_3 + 2$, deci diferența nu poate divide suma. **5p**
Să arătăm acum că nu putem alege mai mult de 671 numere. Presupunem că există 672 astfel de numere în mulțimea A; deoarece mulțimea A poate fi împărțită în $\{1,2,3\}$, $\{4,5,6\}$, ... , $\{2008, 2009, 2010\}$, $\{2011\}$, adică în 671 submulțimi din care alegem 672 numere, cu siguranță există, între cele 672, două numere din aceeași submulțime. **4p**
Fie $\{k, k+1, k+2\}$ acea submulțime din care au fost alese două numere. Dacă au fost alese două numere consecutive, diferența lor (adică 1) divide cu siguranță suma lor (contradicție!); dacă au fost alese numerele k și $k + 2$, ele au aceeași paritate, deci suma lor este pară, iar diferența (adică 2) divide suma (contradicție!). Deci nu putem alege mai mult de 671 numere. **4p**

SUBIECTUL III DREPTUNGHIURI VECINE

Construim succesiv dreptunghiuri *vecine* - când spre dreapta, când în jos - ca în figura de mai jos. Două dreptunghiuri se numesc *vecine* dacă au o latură comună. Laturile dreptunghiurilor au consecutiv lungimi: $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$.



Arătați că există o grupă de două sau mai multe dreptunghiuri vecine două câte două astfel încât suma ariilor acestora să fie egală cu $\frac{1}{3}$.

Soluție. (oficiu **2p**) Observăm că suma ariilor unei grupe de dreptunghiuri vecine este de forma $\frac{1}{m} \cdot \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+1} \cdot \frac{1}{m+2} + \ldots + \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{n}$, de unde trebuie ca $\frac{1}{m} - \frac{1}{n} = \frac{1}{3}$. **5p**
Adică $m = \frac{3n}{n+3} = 3 - \frac{9}{n+3}$. **3p**
Pentru ca m să fie număr natural, trebuie ca $(n+3) \mid 9$, de unde singura posibilitate este $n = 6$, deci $m = 2$, iar dreptunghiurile căutate sunt cele de laturi $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{5}\right), \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{6}\right)$. **5p**