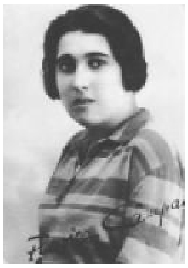

CONCURSUL DE MATEMATICĂ
FLORICA T. CÂMPAN
ETAPA JUDEȚEANĂ, 20 FEBRUARIE 2011

CLASA A VII-A (SEMI-VETERANI)
BAREM

SUBIECTUL I COMPETITI

La un club sportiv sunt înscrişi mai puțin de 70 de elevi. O treime din numărul fetelor reprezintă un sfert din numărul băieților. Unii copii joacă volei, ceilalți joacă handbal. Un sfert din numărul celor care joacă volei reprezintă o cincime din numărul celor care joacă handbal. Ştiind că 17 fete joacă handbal, aflați câți băieți joacă volei.

Gazeta Matematică 11/2010

Soluție. (2p oficiu) Notăm cu *a, b, c, d* numărul fetelor voleibaliste, fetelor handbaliste, băieților voleibalişti, respectiv pe cel al băieților handbalişti. Din datele problemei avem că $\frac{a+b}{3}=\frac{c+d}{4}$, $\frac{a+c}{4}=\frac{b+d}{5}$, $a+b+c+d\le 70$ şi $b=17$. 3p

Din $4(a+b)=3(c+d)$, cum numerele 3 şi 4 sunt prime între ele, rezultă că 3 divide $a+b$, deci $\frac{a+b}{3}=\frac{c+d}{4}=k\in\mathbb{N}$. 3p

Deducem că $a+b+c+d=7k, k\in\mathbb{N}$, prin urmare numărul total al copiilor este multiplu de 7. ....2p

Analog obținem că $a+b+c+d=9l, l\in\mathbb{N}$, adică numărul total al copiilor este multiplu de 9. Rezultă că numărul total al copiilor este multiplu de $[7,9]=63$ şi, cum este cel mult egal cu 70, înseamnă că este 63. ....2p

Atunci $k=9, l=7$, apoi $a+b=27, c+d=36, a+c=28, b+d=35$. Întrucât $b=17$, deducem că $a=10$, iar $c=d=18$. În concluzie, joacă volei 18 băieți. 3p

SUBIECTUL II VALENTE

Despre un număr întreg *a* vom spune că *are valența n* dacă există exact *n* triplete de numere întregi (x,y,z) astfel încât $-5\le x\le 10$, $-5\le y\le 10$, $-5\le z\le 10$ şi $x-2y+3z=a$. Determinați valențele numerelor 50, -50 şi 0.

Claudiu-Ştefan Popa şi Gabriel Popa

Soluție. (2p oficiu) Valoarea maximă a expresiei $x-2y+3z$ se atinge când x şi z sunt maxime şi y este minim şi este $10-2\cdot(-5)+3\cdot 10=50$. Rezultă că $(10,-5,10)$ este singurul triplet admisibil (x,y,z) cu proprietatea că $x-2y+3z=50$, aşadar valența numărului 50 este 1…………………………………………………………………....4p

Valoarea minimă a expresiei $x-2y+3z$ se atinge când x şi z sunt minime şi y este maxim, deci este $-5-2\cdot 10+3\cdot(-5)=-40$. Deducem că nu există triplete admisibile (x,y,z) cu proprietatea că $x-2y+3z=-50$, aşadar valența numărului -50 este 0…..4p

Dacă $-5 \le x \le 10$, $-5 \le y \le 10$, $-5 \le z \le 10$ şi $x-2y+3z=0$, atunci $x+3z \in \{-10,-8,...,18,20\}$. Cercetând fiecare situație în parte, găsim în total $4+5+5+5+6+5+5+6+5+5+6+5+5+ \quad +6+5+5=83$ triplete admisibile, prin urmare valența lui 0 este 83...5p

SUBIECTUL III COMOARA

Un copil de clasa a VII-a găseşte un document îngălbenit de vreme care arată locul unde a fost îngropată o comoară pe o insulă:

Caută turnul bisericii T, cascada C, stejarul bătrân S şi stânca diavolului D. Înfige un ţăruş M la mijlocul drumului drept dintre T şi D şi încă unul N la mijlocul drumului drept dintre C şi S. Uneşte prin linii drepte M cu N şi T cu S, marcând locul în care aceste linii se întâlnesc (E). Mergi de la M la E, numărându-ți paşii, apoi numără tot atâția paşi în prelungirea liniei MN, începând din N, şi înfige un țăruş în locul P în care ai ajuns. Comoara se află acolo unde linia dreaptă prin C şi D întâlneşte linia dreaptă prin T şi P.

Ajuns pe insulă, copilul află de la băştinaşi că stejarul bătrân a fost doborât de un trăsnet, cu mulți ani în urmă. Găseşte însă o hartă veche pe care se vede că *TCSD* era un trapez cu baza mare *TC* şi *DS* = *SO*, unde $\{O\} = ST \cap CD$.

a) Arătați că $ST = DS + TC$.

b) Demonstrați că unghiul $\sphericalangle SPT$ este drept.

c) Ajutați-l pe elev să găsească locul comorii, chiar în absența stejarului bătrân!

Claudiu-Ştefan Popa şi Gabriel Popa

Soluție. (2p oficiu) a) Deoarece *DS* = *SO*, atunci $\sphericalangle SDO \equiv \sphericalangle SOD$. Dreptele paralele *TC* şi *SD*, tăiate de secanta *CD*, formează unghiuri alterne interne congruente, deci $\sphericalangle SDO \equiv \sphericalangle TCO$. Însă $\sphericalangle SOD \equiv \sphericalangle TOC$, ca unghiuri opuse la vârf. Din aceste relații rezultă că $\sphericalangle TCO \equiv \sphericalangle TOC$, deci ΔTOC este isoscel, cu *TO* = *TC*. Obținem că *TS* = *TO* + *SO* = *TC* + *DS*. 4p

b) Cum *NP* = *ME*, rezultă că *EP* = *MN* $= \dfrac{TC+DS}{2} = \dfrac{TS}{2}$. 2p

Din teorema liniei mijlocii în trapez, *MN* şi *DS* sunt drepte paralele şi, folosind reciproca teoremei liniei mijlocii în triunghiul *TDS*, deducem că *E* este mijlocul lui *TS*. În ΔSPT, segmentul *PE* va fi mediană şi va fi egal cu jumătatea laturii pe care cade, prin urmare ΔSPT este dreptunghic în *P*.

3p

c) Fie $\{F\} = CD \cap MN$. Folosind reciproca teoremei liniei mijlocii în ΔCDS, *NF* va fi linie mijlocie în acest triunghi; urmează că $ME = FN = \dfrac{DS}{2}$, deci *FP* = *FN* + *NP* = *FN* + *ME* = *DS*. Cum *FP* şi *DS* sunt drepte paralele, rezultă că *FPSD* este un paralelogram, de unde *PS* şi *CD* sunt drepte paralele. 2p

Deoarece $PS \perp TP$, atunci $CD \perp TP$. În concluzie, comoara se găseşte în piciorul perpendicularei din *T* pe *CD*, punct care se poate determina în absența stejarului *S*...2p