



Pompeiu

# CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ DIMITRIE POMPEIU

Ediția a XI-a, 13-15 mai 2011, Botoșani



## CLASA A VII-A

**Problema 1.** *Uite telescopul!*

a) i) Demonstrați că pentru orice număr natural  $k$ , avem

$$\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{4} \left( \frac{k}{2k-1} + \frac{k}{2k+1} \right).$$

ii) Fie  $A = \frac{2^2}{1 \cdot 3} + \frac{4^2}{3 \cdot 5} + \frac{6^2}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{2010^2}{2009 \cdot 2011}$ . Să se arate că

$$1005 < A < 1005,5.$$

*Gazeta Matematică*, enunț modificat

b) Determinați numerele reale  $x, y, z$  din egalitatea

$$\sqrt{x+2009} + \sqrt{y-2010} + \sqrt{z+2011} = \frac{x+y+z+2037}{6}.$$

**Problema 2.** *Întâlnire neprincipială.*

a) Într-un triunghi dreptunghic  $ABC$ , înălțimea  $[AD]$ , bisectoarea  $(BE)$  și mediana  $[CM]$  sunt concurente. Demonstrați că există un triunghi dreptunghic având lungimile laturilor egale cu  $AD, BD$  și  $DC$ .

b) Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația  $\frac{x}{y} = \frac{x-y+1}{x-y-1}$ .

**Problema 3.** *Paralele printre paralele.*

Fie trapezul  $ABCD$  cu  $AB \parallel CD, AB > CD$  și punctele  $M \in (AD), N \in BC$ , astfel încât  $MC \parallel NA$ .

a) Demonstrați că  $MB \parallel ND$ .

b) Dacă  $\frac{MC}{AN} = \sqrt{\frac{CD}{AB}}$ , demonstrați că dreapta  $MN$  este paralelă cu bazele trapezului și determinați lungimea segmentului  $MN$ .

**Problema suplimentară.** *Căutați ajutor în afară!*

În interiorul unui triunghi echilateral  $ABC$  se consideră punctul  $P$  astfel încât  $PA = 1, PB = \sqrt{2}$  și  $PC = \sqrt{3}$ . Determinați lungimea laturii triunghiului.

*Timp de lucru: 3 ore. Fiecare problemă se punctează corespunzător de la 0 la 7 puncte.*