CONCURSUL DE MATEMATICĂ
FLORICA T. CÂMPAN
ETAPA INTERJUDEȚEANĂ, 26 MARTIE 2011
CLASA A VII-A (SEMI-VETERANI)

SUBIECTUL I **FRACȚII "ECHIVALENTE"**

Se consideră numerele raţionale strict pozitive a, b, c, d astfel încât $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

a) Arătaţi că $\sqrt{ac}\in\mathbb{Q}$ dacă şi numai dacă $\sqrt{bd}\in\mathbb{Q}$.

b) Demonstraţi că $\sqrt{(a+b)(c+d)}\in\mathbb{Q}$ dacă şi numai dacă $\sqrt{ac}\in\mathbb{Q}$.

c) Este adevărată implicaţia $\sqrt{(a+b)(c+d)}\in\mathbb{N}\Rightarrow\sqrt{ac}\in\mathbb{N}$? Dar reciproca?

Soluție. (oficiu **2p**) a) Din $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k\in\mathbb{Q}_+^*$ rezultă că $\sqrt{ac}=k\sqrt{bd}$ şi de aici echivalenţa dorită. … **4p**

b) Avem că $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{c}=\frac{b}{d}=\frac{a+b}{c+d}=\frac{(a+b)(c+d)}{(c+d)^2}\Rightarrow\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}}=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{d}}=\frac{\sqrt{(a+b)(c+d)}}{c+d}$. Însă $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}}=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{d}}=\frac{\sqrt{ac}}{c}=\frac{\sqrt{bd}}{d}=\frac{\sqrt{ac}+\sqrt{bd}}{c+d}$, prin urmare $\sqrt{(a+b)(c+d)}=\sqrt{ac}+\sqrt{bd}$ **3p**

(*Altfel*: $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd=ac+2ad+bd=\left(\sqrt{ac}\right)^2+\left(\sqrt{bd}\right)^2+2\sqrt{ad}\sqrt{bc}=$
$=\left(\sqrt{ac}+\sqrt{bd}\right)^2$, deci $\sqrt{(a+b)(c+d)}=\sqrt{ac}+\sqrt{bd}$. ……………………………………….....**3p**)

Cu notaţiile de la a), obţinem că $\sqrt{(a+b)(c+d)}=(1+k)\sqrt{bd}$. Folosind faptul că $1+k\neq 0$ şi punctul a), rezultă echivalenţa dorită. **2p**

c) Pentru $a=b=1, c=d=\frac{1}{4}$ avem că $\sqrt{(a+b)(c+d)}=1\in\mathbb{N}$, dar $\sqrt{ac}=\frac{1}{2}\notin\mathbb{N}$. Pentru $a=2$, $b=\frac{2}{3}, c=\frac{1}{2}, d=\frac{1}{6}$ avem că $\sqrt{(a+b)(c+d)}=\frac{4}{3}\notin\mathbb{N}$, dar $\sqrt{ac}=1\in\mathbb{N}$. Rezultă că niciuna dintre cele două implicaţii nu este adevărată. **4p**

SUBIECTUL II **PRODUSE EGALE**

Considerăm mulţimea $M=\{-1,-2,-3,...,-2011\}$. Pentru fiecare submulţime nevidă A a lui M, calculăm produsul P_A al tuturor elementelor sale; dacă $A=\{a\}$, atunci $P_A=a$.

a) Găsiţi trei submulţimi distincte A, B şi C ale lui M, pentru care $P_A=P_B=P_C$.

b) Care este valoarea cea mai mare pe care o poate lua un astfel de produs? Dar cea mai mică?

c) Calculaţi suma tuturor produselor care se obţin. (Dacă valoarea unui produs se repetă pentru mai multe submulţimi ale lui M, respectiva valoare se va repeta de acelaşi număr de ori şi în sumă.)

Soluție. (oficiu **2p**) a) De exemplu, putem considera $A=\{-1,-12\}, B=\{-2,-6\}$ şi $C=\{-3,-4\}$ **4p**

b) Cel mai mare produs este $P_{M\setminus\{-1\}}=2011!$, ...**2p**

iar cel mai mic este $P_M=-2011!$. **2p**

c) Dacă A este o submulţime nevidă a lui M care nu conţine pe -1, atunci $P_A=-P_{A\cup\{-1\}}$ **2p**

După reduceri de termeni, în sumă rămâne doar $-1=P_{\{-1\}}$, deci valoarea sumei cerute este -1. ....**3p**

SUBIECTUL III **GRAFICĂ PE COMPUTER**

Ioana desenează pe monitorul calculatorului, cu ajutorul unui program de grafică pe computer, un triunghi isoscel ABC şi ia punctele D pe baza (BC) şi E pe latura (AB) astfel încât

$\sphericalangle ADE \equiv \sphericalangle ACB.$. Programul folosit îi permite Ioanei să selecteze orice triunghi care apare în desen, să-l mărească sau să-l micşoreze (păstrându-i forma) cu funcţia *zoom*, să-i schimbe poziţia sau să-l rotească, după dorinţă. Numim *transformare* o succesiune oarecare de astfel de operaţii.

a) Demonstraţi că Ioana poate găsi o transformare în urma căreia triunghiul DBE să se suprapună exact peste triunghiul ACD.

b) Observând alte transformări urmate de suprapuneri de triunghiuri în configuraţia desenată, Ioana redescoperă *relaţia lui Stewart* pentru triunghiul isoscel: $AB^2 = AD^2 + BD \cdot CD$.

Demonstraţi şi voi această relaţie!

Soluție. (oficiu **2p**) În urma unei transformări, un triunghi oarecare este înlocuit cu altul asemenea cu el. **2p**

a) Din $\sphericalangle ADE \equiv \sphericalangle ACB$ rezultă că $\sphericalangle CAD \equiv \sphericalangle BDE$, de unde $\Delta ACD \sim \Delta DBE$. **4p**

b) Deoarece $\sphericalangle ADE \equiv \sphericalangle ACB$ şi $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ACB$, deducem că $\Delta ADE \sim \Delta ABD$, deci $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AD}$.

Astfel, $AD^2 = AB \cdot AE = AB \cdot (AB - BE) = AB^2 - AB \cdot BE$. **4p**

Folosind asemănarea de la punctul a), obţinem că $\frac{AC}{BD} = \frac{CD}{BE}$, prin urmare $AC \cdot BE = BD \cdot CD$. Cum $AB = AC$, rezultă că $AD^2 = AB^2 - BD \cdot CD$, relaţie echivalentă cu cea cerută. **3p**