



**CONCURSUL DE MATEMATICĂ
FLORICA T. CÂMPĂAN
ETAPA INTERJUDEȚEANĂ, 26 MARTIE 2011
CLASA A VII-A (SEMI-VETERANI)**



SUBIECTUL I FRAȚII "ECHIVALENTE"

Se consideră numerele raționale strict pozitive a, b, c, d astfel încât $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

- a) Arătați că $\sqrt{ac} \in \mathbb{Q}$ dacă și numai dacă $\sqrt{bd} \in \mathbb{Q}$.
 b) Demonstrați că $\sqrt{(a+b)(c+d)} \in \mathbb{Q}$ dacă și numai dacă $\sqrt{ac} \in \mathbb{Q}$.
 c) Este adevărată implicația $\sqrt{(a+b)(c+d)} \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{ac} \in \mathbb{N}$? Dar reciproca?

Soluție. (oficiu **2p**) a) Din $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \in \mathbb{Q}_+^*$ rezultă că $\sqrt{ac} = k\sqrt{bd}$ și de aici echivalența dorită. ... **4p**

b) Avem că $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{a+b}{c+d} = \frac{(a+b)(c+d)}{(c+d)^2} \Rightarrow \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{d}} = \frac{\sqrt{(a+b)(c+d)}}{c+d}$. Înșă

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{d}} = \frac{\sqrt{ac}}{c} = \frac{\sqrt{bd}}{d} = \frac{\sqrt{ac} + \sqrt{bd}}{c+d}$, prin urmare $\sqrt{(a+b)(c+d)} = \sqrt{ac} + \sqrt{bd}$ **3p**

(Altfel: $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd = ac + 2ad + bd = (\sqrt{ac})^2 + (\sqrt{bd})^2 + 2\sqrt{ad}\sqrt{bc} = (\sqrt{ac} + \sqrt{bd})^2$, deci $\sqrt{(a+b)(c+d)} = \sqrt{ac} + \sqrt{bd}$ **3p**)

Cu notațiile de la a), obținem că $\sqrt{(a+b)(c+d)} = (1+k)\sqrt{bd}$. Folosind faptul că $1+k \neq 0$ și punctul a), rezultă echivalența dorită. **2p**

c) Pentru $a=b=1, c=d=\frac{1}{4}$ avem că $\sqrt{(a+b)(c+d)} = 1 \in \mathbb{N}$, dar $\sqrt{ac} = \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$. Pentru $a=2, b=\frac{2}{3}, c=\frac{1}{2}, d=\frac{1}{6}$ avem că $\sqrt{(a+b)(c+d)} = \frac{4}{3} \notin \mathbb{N}$, dar $\sqrt{ac} = 1 \in \mathbb{N}$. Rezultă că niciuna dintre cele două implicații nu este adevărată. **4p**

SUBIECTUL II PRODUSE EGALE

Considerăm mulțimea $M = \{-1, -2, -3, \dots, -2011\}$. Pentru fiecare submulțime nevidă A a lui M , calculăm produsul P_A al tuturor elementelor sale; dacă $A = \{a\}$, atunci $P_A = a$.

- a) Găsiți trei submulțimi distincte A, B și C ale lui M , pentru care $P_A = P_B = P_C$.
 b) Care este valoarea cea mai mare pe care o poate lua un astfel de produs? Dar cea mai mică?
 c) Calculați suma tuturor produselor care se obțin. (Dacă valoarea unui produs se repetă pentru mai multe submulțimi ale lui M , respectiva valoare se va repeta de același număr de ori și în sumă.)

Soluție. (oficiu **2p**) a) De exemplu, putem considera $A = \{-1, -12\}, B = \{-2, -6\}$ și $C = \{-3, -4\}$ **4p**

b) Cel mai mare produs este $P_{M \setminus \{-1\}} = 2011!$, **2p**

iar cel mai mic este $P_M = -2011!$ **2p**

c) Dacă A este o submulțime nevidă a lui M care nu conține pe -1 , atunci $P_A = -P_{A \cup \{-1\}}$ **2p**

După reduceri de termeni, în sumă rămâne doar $-1 = P_{\{-1\}}$, deci valoarea sumei cerute este -1 **3p**

SUBIECTUL III GRAFICĂ PE COMPUTER

Ioana desenează pe monitorul calculatorului, cu ajutorul unui program de grafică pe computer, un triunghi isoscel ABC și ia punctele D pe baza (BC) și E pe latura (AB) astfel încât



$\sphericalangle ADE \equiv \sphericalangle ACB$. Programul folosit îi permite Ioanei să selecteze orice triunghi care apare în desen, să-l mărească sau să-l micșoreze (păstrându-i forma) cu funcția *zoom*, să-i schimbe poziția sau să-l rotească, după dorință. Numim *transformare* o succesiune oarecare de astfel de operații.

a) Demonstrați că Ioana poate găsi o transformare în urma căreia triunghiul *DBE* să se suprapună exact peste triunghiul *ACD*.

b) Observând alte transformări urmate de suprapuneri de triunghiuri în configurația desenată, Ioana redescoperă *relația lui Stewart* pentru triunghiul isoscel: $AB^2 = AD^2 + BD \cdot CD$.

Demonstrați și voi această relație!

Soluție. (oficiu **2p**) În urma unei transformări, un triunghi oarecare este înlocuit cu altul asemenea cu el.**2p**

a) Din $\sphericalangle ADE \equiv \sphericalangle ACB$ rezultă că $\sphericalangle CAD \equiv \sphericalangle BDE$, de unde $\Delta ACD \sim \Delta DBE$**4p**

b) Deoarece $\sphericalangle ADE \equiv \sphericalangle ACB$ și $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ACB$, deducem că $\Delta ADE \sim \Delta ABD$, deci $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AD}$.

Astfel, $AD^2 = AB \cdot AE = AB \cdot (AB - BE) = AB^2 - AB \cdot BE$**4p**

Folosind asemănarea de la punctul a), obținem că $\frac{AC}{BD} = \frac{CD}{BE}$, prin urmare $AC \cdot BE = BD \cdot CD$. Cum

$AB = AC$, rezultă că $AD^2 = AB^2 - BD \cdot CD$, relație echivalentă cu cea cerută.**3p**