

CONCURSUL NAȚIONAL „PANAITOPOL”
14 mai 2011, Tulcea

Subiecte – clasa a VII-a

1. a) Arătați că există cel puțin un număr natural n astfel încât

$$10^{29} < 2^n < 10^{30}.$$

- b) Numărul 2^m se scrie cu 30 de cifre. Arătați că există o cifră se repetă de cel puțin patru ori în scrierea lui 2^m .

2. Determinați numerele naturale nenule a, b, c pentru care

$$\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = \frac{a+b+c}{2}.$$

3. Se consideră un paralelogram $ABCD$ cu centrul O . Punctele M și N sunt mijloacele segmentelor $[BO]$ și $[CD]$. Dacă triunghiurile ABC și AMN sunt asemenea, demonstrați că $ABCD$ este pătrat.

4. Fie n un număr natural care are exact 9 divizori și D_n mulțimea divizorilor săi. Arătați că, dacă X este o submulțime de trei elemente a lui D_n , atunci produsul elementelor lui X este cub perfect sau există trei elemente în mulțimea $D_n \setminus X$ al căror produs este cub perfect.

Timp de lucru: 3 ore. Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.