CONCURSUL DE MATEMATICĂ
FLORICA T. CÂMPAN
ETAPA JUDEȚEANĂ, 20 FEBRUARIE 2011

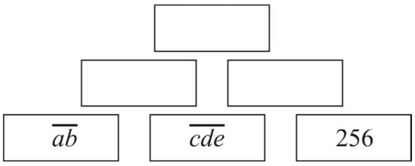
CLASA A VIII-A (VETERANII)
BAREM

SUBIECTUL I PRINTRE HOTI

Ali-Baba şi ai lui 40 de hoți au strâns de-a lungul timpului o sumă imensă de bani: $\overline{abcde256}$ euro. Pentru că Ali-Baba se temea de hoți, a pus suma într-un seif la o bancă în Elveția. Un agent sub acoperire, infiltrat de foarte multă vreme în banda lui Ali-Baba era cunoscut ca un rapper de succes, pe nume M-One. Acesta a aflat în scurt timp combinația de la seif şi a scris următorul e-mail către colegii din poliție:

*** $\overline{cde}<256$

*** în fiecare căsuță este un pătrat perfect şi fiecare căsuță este suma căsuțelor peste care se află



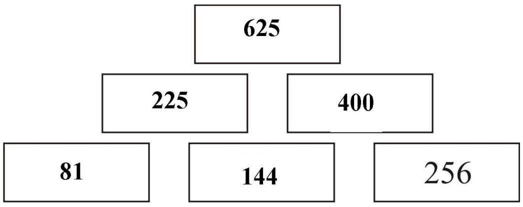
*** La vârf este codul:

Sunt pătrat de pătrat
Natural, adevărat
Cel mai mare din o mie
Toată lumea mă ştie

Cei din poliție nu s-au descurcat cu mesajul şi l-au trimis la Concursul "*Florica T. Câmpan*", sperând ca unul dintre elevi să dezlege problema. Aflați pentru ei codul seifului şi suma din seif.

Marian Panțiruc

Soluție. (2p oficiu) Pătrat de pătrat înseamnă puterea a patra a unui număr natural, şi fiind cel mai mare din 1000, codul este $625=5^4$………..……………………………………….4p
Descompune 625 = 25 + 400. ……………………………………………………...3p
Găseşte $\overline{ab}=81$ şi $\overline{cde}=144$. ……………………………………………………………….3p
Suma din seif este de 81144256 euro. ……………………………………………………..3p



SUBIECTUL II CUB ETICHETAT

În vârfurile unui cub se aşează numere naturale şi pe fiecare muchie se aşează media aritmetică a numerelor din capete, de asemenea număr natural.

a) Pot fi cele 20 de numere pare şi distincte două câte două?

b) Pot fi cele 20 de numere impare şi distincte două câte două?

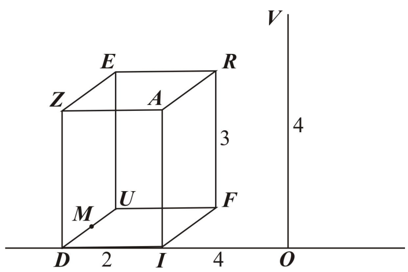
c) Să se arate că nu putem aşeza în acest fel 20 de numere consecutive.

Julieta Grigoraş

Soluție. (2p oficiu) a) Nu avem decât să luăm în fiecare vârf numere de forma 2^k, $k \geq 2$, având grijă ca exponenții să fie diferiți. Cum $2^i + 2^j = 2^m + 2^n$ dacă şi numai dacă $\{i, j\} = \{m, n\}$, problema este rezolvată, deoarece este clar că media aritmetică este un nr par ($k \geq 2$)....4p
b) Este suficient să observăm că dacă numerele a şi b au media aritmetică m_a atunci numerele $a+k$ şi $b+k$ au media aritmetică m_a+k. Luăm atunci numerele de la pct b), mărite cu 1………....4p
c) Media aritmetică a numerelor din capetele unei muchii fiind număr natural, înseamnă că în capete avem numere de aceeaşi paritate (ambele pare sau ambele impare). Din aproape în aproape se deduce că în cele 8 vârfuri ale cubului avem ori numai numere pare ori numai numere impare.
Pe de altă parte, oricum am lua 20 de numere (distincte 2 câte 2), cel mai mic şi cel mai mare dintre acestea nu pot fi scrise ca media aritmetică a 2 dintre celelalte numere:
$\min(a, b) < (a+b) / 2 < \max(a, b)$, pentru $a \neq b$.
Astfel, în mod necesar cel mai mic şi cel mai mare dintre aceste numere se vor afla în vârfurile cubului. Însă, dacă aceste numere sunt consecutive, cel mai mare şi cel mai mic au parități diferite, ajungând astfel la o contradicție. Deci, cele 20 de numere nu pot fi numere consecutive..5p

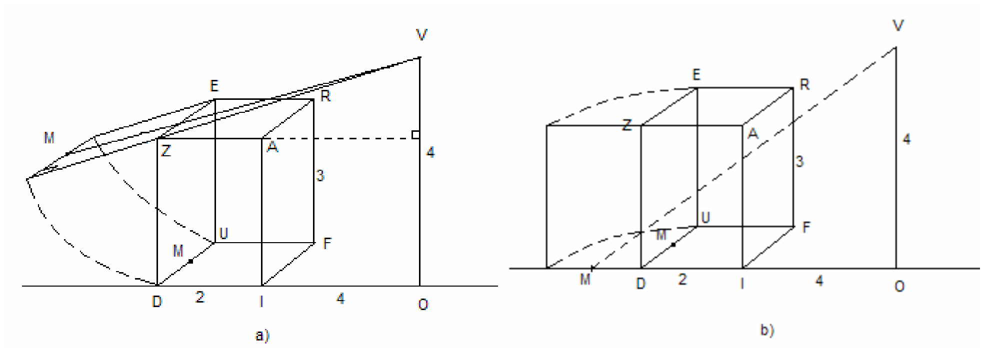
SUBIECTUL III DIFUZARE STRADALA

Un chioşc de ziare are forma unei prisme patrulatere regulate *DIFUZARE*, cu latura bazei de 2m şi înălțimea de 3m. Chioşcul este alimentat cu curent electric printr-un fir ce uneşte vârful *V* al unui stâlp *VO* înalt de 4m cu mijlocul laturii *DU* (evident, fără a străpunge chioşcul). Ştiind că punctele *D*, *I*, *O* sunt coliniare şi *IO* = 4m aflați lungimea celui mai scurt fir care poate alimenta chioşcul cu energie electrică.



Marian Panțiruc

Soluție. (2p oficiu) Problema conduce, în mod inevitabil la desfăşurări, trebuie doar să observăm că putem face două:
a) *ridicăm* fața *DUEZ* în planul (*VEZ*) şi determină lungimea segmentului *VM*…………...2p
b) aceeaşi față *DUEZ* o aducem în planul (*VODZ*) şi determinăm din nou lungimea segmentului *VM*………………………………………………………………………….2p



Pentru situația de la punctul a) $VM^2 = 1+(2+\sqrt{37})^2 = 42+4\sqrt{37}$ ………………………......4p
iar pentru punctul b) $VM^2 = 65$ ……………………………………………………………..4p
Dar $42+4\sqrt{37} > 65$ şi atunci situația cerută este cea de la punctul b). ……………………...1p