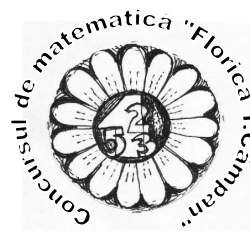




CONCURSUL DE MATEMATICĂ
FLORICA T. CÂMPAN
 ETAPA JUDEȚEANĂ, 20 FEBRUARIE 2011



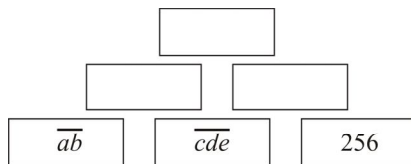
CLASA A VIII-A (VETERANII)
BAREM

SUBIECTUL I PRINTRE HOTI

Ali-Baba și ai lui 40 de hoți au strâns de-a lungul timpului o sumă imensă de bani: $\overline{abcde}256$ euro. Pentru că Ali-Baba se temea de hoți, a pus suma într-un seif la o bancă în Elveția. Un agent sub acoperire, infiltrat de foarte multă vreme în banda lui Ali-Baba era cunoscut ca un rapper de succes, pe nume M-One. Acesta a aflat în scurt timp combinația de la seif și a scris următorul e-mail către colegii din poliție:

*** $\overline{cde} < 256$

*** în fiecare căsuță este un pătrat perfect și fiecare căsuță este suma căsuțelor peste care se află



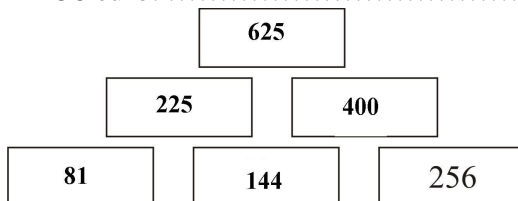
*** La vârf este codul:

*Sunt pătrat de pătrat
 Natural, adevărat
 Cel mai mare din o mie
 Toată lumea mă știe*

Cei din poliție nu s-au descurcat cu mesajul și l-au trimis la Concursul "Florica T. Câmpân", sperând ca unul dintre elevi să dezlege problema. Aflați pentru ei codul seifului și suma din seif.

Marian Panțiruc

Soluție. (2p oficiu) Pătrat de pătrat înseamnă puterea a patra a unui număr natural, și fiind cel mai mare din 1000, codul este $625=5^4$4p
 Descompune $625 = 25 + 400$3p
 Găsește $\overline{ab} = 81$ și $\overline{cde} = 144$3p
 Suma din seif este de 81144256 euro.3p



SUBIECTUL II CUB ETICHETAT

În vârfurile unui cub se așează numere naturale și pe fiecare muchie se așează media aritmetică a numerelor din capete, de asemenea număr natural.

- a) Pot fi cele 20 de numere pare și distincte două câte două?
- b) Pot fi cele 20 de numere impare și distincte două câte două?
- c) Să se arate că nu putem așeza în acest fel 20 de numere consecutive.

Julieta Grigoraș

Soluție. (2p oficiu) a) Nu avem decât să luăm în fiecare vârf numere de forma 2^k , $k \geq 2$, având grijă ca exponenții să fie diferiți. Cum $2^i + 2^j = 2^m + 2^n$ dacă și numai dacă $\{i, j\} = \{m, n\}$, problema este rezolvată, deoarece este clar că media aritmetică este un nr par ($k \geq 2$)...4p
 b) Este suficient să observăm că dacă numerele a și b au media aritmetică m_a atunci numerele $a+k$ și $b+k$ au media aritmetică m_a+k . Luăm atunci numerele de la pct b), mărite cu 1.....4p
 c) Media aritmetică a numerelor din capetele unei muchii fiind număr natural, înseamnă că în capete avem numere de aceeași paritate (ambele pare sau ambele impare). Din aproape în aproape se deduce că în cele 8 vârfuri ale cubului avem ori numai numere pare ori numai numere impare.

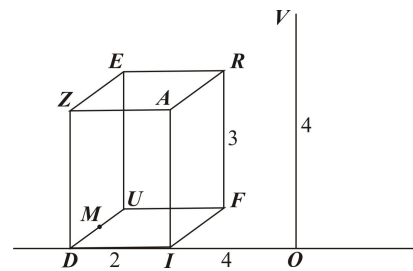
Pe de altă parte, oricum am lua 20 de numere (distincte 2 câte 2), cel mai mic și cel mai mare dintre acestea nu pot fi scrise ca media aritmetică a 2 dintre celelalte numere:

$$\min(a, b) < (a+b) / 2 < \max(a, b), \text{ pentru } a \neq b.$$

Astfel, în mod necesar cel mai mic și cel mai mare dintre aceste numere se vor afla în vârfurile cubului. Însă, dacă aceste numere sunt consecutive, cel mai mare și cel mai mic au parități diferite, ajungând astfel la o contradicție. Deci, cele 20 de numere nu pot fi numere consecutive.....5p

SUBIECTUL III DIFUZARE STRADALA

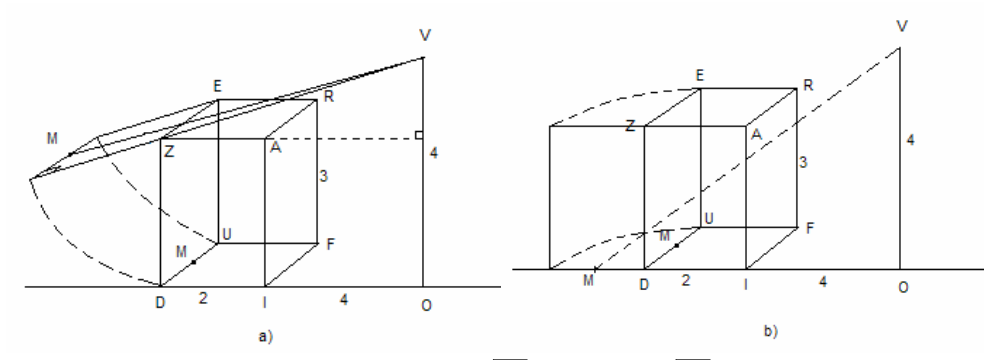
Un chioșc de ziare are forma unei prisme patrulatere regulate *DIFUZARE*, cu latura bazei de 2m și înălțimea de 3m. Chioșcul este alimentat cu curent electric printr-un fir ce unește vârful *V* al unui stâlp *VO* înalt de 4m cu mijlocul laturii *DU* (evident, fără a străpunge chioșcul). Știind că punctele *D, I, O* sunt coliniare și $IO = 4m$ aflați lungimea celui mai scurt fir care poate alimenta chioșcul cu energie electrică.



Marian Paștiruc

Soluție. (2p oficiu) Problema conduce, în mod inevitabil la desfășurări, trebuie doar să observăm că putem face două:

- a) ridicăm fața *DUEZ* în planul (*VEZ*) și determinăm lungimea segmentului *VM*.....2p
- b) aceeași față *DUEZ* o aducem în planul (*VODZ*) și determinăm din nou lungimea segmentului *VM*.....2p



Pentru situația de la punctul a) $VM^2 = 1 + (2 + \sqrt{37})^2 = 42 + 4\sqrt{37}$ 4p
 iar pentru punctul b) $VM^2 = 65$ 4p
 Dar $42 + 4\sqrt{37} > 65$ și atunci situația cerută este cea de la punctul b).1p