CONCURSUL NAŢIONAL „PANAITOPOL”
14 mai 2011, Tulcea

Subiecte – clasa a VIII-a

1. a) Determinaţi numerele naturale prime n care au proprietatea
$$n^2 + 2011 < 90n.$$
b) Determinaţi numerele naturale nenule n cu proprietatea că a este divizibil cu b, unde
$$a = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{3n-2} \text{ şi } b = 3 + 3^2 + \ldots + 3^{2n-1}.$$

2. a) Dacă $a, b, c \in \mathbb{R}$ şi $a+b+c = 0$, arătaţi că: $a^3+b^3+c^3 = 3abc$.
b) Numerele reale pozitive a şi b verifică relaţia:
$$\frac{a+b}{2} + \sqrt{ab} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + \frac{2ab}{a+b}.$$
Arătaţi că $a = b$.

3. Se consideră triunghiul ABC în care $(AD$ este bisectoarea unghiului $\angle BAC$, $D \in (BC)$. Cercul care conţine punctul A şi este tangent la dreapta BC în punctul D intersectează segmentele $[AB]$ şi $[AC]$ în punctele E, respectiv F şi segmentul (BF) în punctul N.
Demonstraţi că mijlocul segmentului $[BD]$ este situat pe dreapta AN.

4. Fie p şi q două numere prime distincte. Arătaţi că există numerele naturale nenule a şi b astfel încât media aritmetică a tuturor divizorilor naturali ai numărului
$$n = p^a \cdot q^b$$
să fie număr întreg.

Timp de lucru: 3 ore. Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.