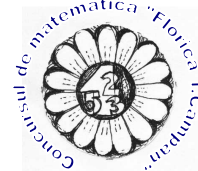




CONCURSUL DE MATEMATICĂ  
**FLORICA T. CÂMPĂNU**  
 ETAPA INTERJUDEȚEANĂ, 26 MARTIE 2011  
 CLASA A VIII-A (VETERANI)



**SUBIECTUL I**

**PRISMĂ COLORATĂ**

Fie prisma triunghiulară regulată  $A_1A_2A_3B_1B_2B_3$  având toate muchiile precum și diagonalele fețelor laterale colorate cu roșu sau albastru. În fiecare triunghi care se formează, exceptând bazele, există atât o latură roșie cât și o latură albastră. Să se arate că toate cele 6 muchii ale bazelor sunt colorate cu aceeași culoare.

*Soluție.* (oficiu **2p**) Presupunem că baza  $A$  are două laturi colorate diferit, de exemplu  $A_1A_2$  roșie și  $A_2A_3$  albastră. ....**3p**

Dintre segmentele  $A_2B_1$ ,  $A_2B_3$  și  $A_2B_2$  sunt două colorate la fel, să zicem roșu, fie ele  $A_2B_1$  și  $A_2B_3$  ..**5p**

Atunci segmentele  $A_1B_1$ ,  $A_1B_3$  și  $B_1B_3$  trebuie să fie albastre, deoarece conform ipotezei triunghiurile  $A_1A_2B_1$ ,  $A_1A_2B_3$  și  $B_1A_2B_3$  nu pot fi monoculare. Obținem astfel triunghiul  $A_1B_1B_3$  de culoare albastră. Contradicție. ....**1p**

Presupunem acum cele două baze colorate diferit. De exemplu  $\Delta A_1A_2A_3$  roșu și  $\Delta B_1B_2B_3$  albastru. Analog putem considera  $A_2B_1$  și  $A_2B_3$  roșii. La fel  $A_1B_1$  și  $A_1B_3$  trebuie să fie albastre și obținem astfel triunghiul  $A_1B_1B_3$  albastru. Deci bazele au aceeași culoare. ....**4p**

**SUBIECTUL II**

**MÜNCHHAUSEN**

Baronul de Münchhausen spunea o obișnuită poveste gogonată despre cum a zburat el pe Lună călare pe o ghiulea trasă dintr-un tun. Oricine ar fi putut spune că e o uriașă minciună, însă puțini puteau și demonstra acest lucru. În cele din urmă un copil isteț de vreo 15 ani a reușit să afle studiind diverse specificații tehnice că viteza unei ghiulele ar fi de 200m/s și, conform legilor fizicii după  $t > 0$  secunde de mișcare ghiuleaua se află la înălțimea  $h(t) = -5t^2 + 200t$ .

Aflați și voi înălțimea maximă la care ar fi putut ajunge baronul Münchhausen și timpul total al călătoriei sale călare pe ghiulea.

*Soluție.* (oficiu **2p**)  $h(t) = -5(t^2 - 40t)$  implică  $h(t) = -5(t - 20)^2 + 2000$  ....**3p**

$-5(t - 20)^2 \leq 0$ , pentru orice  $t$  .....**2p**

Valoarea maximă se atinge deci pentru  $t = 20$ . ....**2p**

$h_{\max} = h(20) = 2000$  m. ....**2p**

Sfârșitul călătoriei înseamnă că ghiuleaua revine pe pământ. ....**1p**

Asta înseamnă  $h(t) = 0$ . ....**1p**

$h(t) = 0$  implică  $t = 40$ . ....**1p**

Soluția corectă este  $t = 40$  s. ....**1p**

**SUBIECTUL III**

**JOC CU CURCI**

Într-un joc, Cătălin și Lucian au vândut împreună  $n$  curci cu câte  $n$  lei fiecare, acționând succesiv: dintâi Lucian, apoi Cătălin. Lucian a luat 10 lei, Cătălin a luat 10 lei, apoi din nou Lucian și așa mai departe. Lui Cătălin i-a revenit la sfârșit o sumă mai mică decât 10 lei. El a luat acest rest și o curcă de la Lucian, ambii acceptând că au obținut același câștig.

a) Cât costă o curcă? b) Ați putea preciza unic și valoarea lui  $n$ ?

*Soluție.* (oficiu **2p**) a) Suma totală încasată este  $n^2$ . Fie  $n = 10k + r$  cu  $k, r \in \mathbb{N}$  și  $0 \leq r < 10$ . ....**2p**

Atunci  $n^2 = 100k^2 + 20kr + r^2 = 20k(5k + r) + r^2$ . ....**2p**

Însă numărul zecilor lui  $n^2$  este impar deoarece la final Cătălin nu-și mai ia cei 10 lei și atunci cum  $r^2 \in \{0; 4; 9; 16; 25; 36; 49; 64; 81\}$ . ....**4p**

Rămâne că  $r^2 \in \{16; 36\}$ , ceea ce înseamnă că în ambele cazuri restul împărțirii lui  $n^2$  la 10 este 6. Deci ultima oară Cătălin ia 6 lei, adică cu 4 lei mai puțin decât Lucian, ceea ce înseamnă că o curcă costă 2 lei. ....**3p**

b) Nu. Avem  $n = 10k + 2$ , cu  $k = 2p + 1$ . ....**2p**