CONCURSUL DE MATEMATICĂ
FLORICA T. CÂMPAN
ETAPA INTERJUDEȚEANĂ, 26 MARTIE 2011
CLASA A VIII-A (VETERANI)

SUBIECTUL I **PRISMĂ COLORATĂ**

Fie prisma triunghiulară regulată $A_1A_2A_3B_1B_2B_3$ având toate muchiile precum şi diagonalele feţelor laterale colorate cu roşu sau albastru. În fiecare triunghi care se formează, exceptând bazele, există atât o latură roşie cât şi o latură albastră. Să se arate că toate cele 6 muchii ale bazelor sunt colorate cu aceeaşi culoare.

Soluție. (oficiu **2p**) Presupunem că baza A are două laturi colorate diferit, de exemplu A_1A_2 roşie şi A_2A_3 albastră. **3p**

Dintre segmentele A_2B_1, A_2B_3 şi A_2B_2 sunt două colorate la fel, să zicem roşu, fie ele A_2B_1 şi A_2B_3 ..**5p**

Atunci segmentele A_1B_1, A_1B_3 şi B_1B_3 trebuie să fie albastre, deoarece conform ipotezei triunghiurile $A_1A_2B_1$, $A_1A_2B_3$ şi $B_1A_2B_3$ nu pot fi monocolore. Obţinem astfel triunghiul $A_1B_1B_3$ de culoare albastră. Contradicţie. **1p**

Presupunem acum cele două baze colorate diferit. De exemplu $\Delta A_1A_2A_3$ roşu şi $\Delta B_1B_2B_3$ albastru. Analog putem considera A_2B_1 şi A_2B_3 roşii. La fel A_1B_1 şi A_1B_3 trebuie să fie albastre şi obţinem astfel triunghiul $A_1B_1B_3$ albastru. Deci bazele au aceeaşi culoare. **4p**

SUBIECTUL II **MÜNHHAUSEN**

Baronul de Münchhausen spunea o obişnuită poveste gogonată despre cum a zburat el pe Lună călare pe o ghiulea trasă dintr-un tun. Oricine ar fi putut spune că e o uriaşă minciună, însă puţini puteau şi demonstra acest lucru. În cele din urmă un copil isteţ de vreo 15 ani a reuşit să afle studiind diverse specificatii tehnice că viteza unei ghiulele ar fi de 200m/s şi, conform legilor fizicii după $t > 0$ secunde de mişcare ghiuleaua se află la înălţimea $h(t) = -5t^2 + 200t$.

Aflaţi şi voi înălţimea maximă la care ar fi putut ajunge baronul Münchhausen şi timpul total al călătoriei sale călare pe ghiulea.

Soluție. (oficiu **2p**) $h(t) = -5\left(t^2 - 40t\right)$ implică $h(t) = -5(t-20)^2 + 2000$ **3p**

$-5(t-20)^2 \le 0$, pentru orice t **2p**

Valoarea maximă se atinge deci pentru $t = 20$. **2p**

$h_{max} = h(20) = 2000$ m. **2p**

Sfârşitul călătoriei înseamnă că ghiuleaua revine pe pământ. **1p**

Asta înseamnă $h(t) = 0$. **1p**

$h(t) = 0$ implică $t = 40$. **1p**

Soluția corectă este $t = 40$ s. **1p**

SUBIECTUL III **JOC CU CURCI**

Într-un joc, Cătălin şi Lucian au vândut împreună n curci cu câte n lei fiecare, acționând succesiv: dintâi Lucian, apoi Cătălin. Lucian a luat 10 lei, Cătălin a luat 10 lei, apoi din nou Lucian şi aşa mai departe. Lui Cătălin i-a revenit la sfârşit o sumă mai mică decât 10 lei. El a luat acest rest şi o curcă de la Lucian, ambii acceptând că au obţinut acelaşi câştig.

a) Cât costă o curcă? b) Ați putea preciza unic şi valoarea lui n?

Soluție. (oficiu **2p**) a) Suma totală încasată este n^2. Fie $n = 10k + r$ cu $k, r \in \mathbb{N}$ şi $0 \le r < 10$. **2p**

Atunci $n^2 = 100k^2 + 20kr + r^2 = 20k(5k + r) + r^2$. **2p**

Însă numărul zecilor lui n^2 este impar deoarece la final Cătălin nu-şi mai ia cei 10 lei şi atunci cum $r^2 \in \{0;4;9;16;25;36;49;64;81\}$. **4p**

Rămâne că $r^2 \in \{16;36\}$, ceea ce înseamnă că în ambele cazuri restul împărţirii lui n^2 la 10 este 6. Deci ultima oară Cătălin ia 6 lei, adică cu 4 lei mai puţin decât Lucian, ceea ce însemnă că o curcă costă 2 lei. **3p**

b) Nu. Avem $n = 10k + 2$, cu $k = 2p + 1$. **2p**