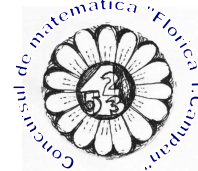




CONCURSUL DE MATEMATICĂ
FLORICA T. CÂMPĂNU
 ETAPA INTERJUDEȚEANĂ, 26 MARTIE 2011
 CLASA A VIII-A (VETERANI)



SUBIECTUL I

PRISMĂ COLORATĂ

Fie prisma triunghiulară regulată $A_1A_2A_3B_1B_2B_3$ având toate muchiile precum și diagonalele fețelor laterale colorate cu roșu sau albastru. În fiecare triunghi care se formează, exceptând bazele, există atât o latură roșie cât și o latură albastră. Să se arate că toate cele 6 muchii ale bazelor sunt colorate cu aceeași culoare.

Soluție. (oficiu **2p**) Presupunem că baza A are două laturi colorate diferit, de exemplu A_1A_2 roșie și A_2A_3 albastră.**3p**

Dintre segmentele A_2B_1 , A_2B_3 și A_2B_2 sunt două colorate la fel, să zicem roșu, fie ele A_2B_1 și A_2B_3 ..**5p**

Atunci segmentele A_1B_1 , A_1B_3 și B_1B_3 trebuie să fie albastre, deoarece conform ipotezei triunghiurile $A_1A_2B_1$, $A_1A_2B_3$ și $B_1A_2B_3$ nu pot fi monoculare. Obținem astfel triunghiul $A_1B_1B_3$ de culoare albastră. Contradicție.**1p**

Presupunem acum cele două baze colorate diferit. De exemplu $\Delta A_1A_2A_3$ roșu și $\Delta B_1B_2B_3$ albastru. Analog putem considera A_2B_1 și A_2B_3 roșii. La fel A_1B_1 și A_1B_3 trebuie să fie albastre și obținem astfel triunghiul $A_1B_1B_3$ albastru. Deci bazele au aceeași culoare.**4p**

SUBIECTUL II

MÜNCHHAUSEN

Baronul de Münchhausen spunea o obișnuită poveste gogonată despre cum a zburat el pe Lună călare pe o ghiulea trasă dintr-un tun. Oricine ar fi putut spune că e o uriașă minciună, însă puțini puteau și demonstra acest lucru. În cele din urmă un copil isteț de vreo 15 ani a reușit să afle studiind diverse specificații tehnice că viteza unei ghiulele ar fi de 200m/s și, conform legilor fizicii după $t > 0$ secunde de mișcare ghiuleaua se află la înălțimea $h(t) = -5t^2 + 200t$.

Aflați și voi înălțimea maximă la care ar fi putut ajunge baronul Münchhausen și timpul total al călătoriei sale călare pe ghiulea.

Soluție. (oficiu **2p**) $h(t) = -5(t^2 - 40t)$ implică $h(t) = -5(t - 20)^2 + 2000$ **3p**

$-5(t - 20)^2 \leq 0$, pentru orice t **2p**

Valoarea maximă se atinge deci pentru $t = 20$**2p**

$h_{\max} = h(20) = 2000$ m.**2p**

Sfârșitul călătoriei înseamnă că ghiuleaua revine pe pământ.**1p**

Asta înseamnă $h(t) = 0$**1p**

$h(t) = 0$ implică $t = 40$**1p**

Soluția corectă este $t = 40$ s.**1p**

SUBIECTUL III

JOC CU CURCI

Într-un joc, Cătălin și Lucian au vândut împreună n curci cu câte n lei fiecare, acționând succesiv: dintâi Lucian, apoi Cătălin. Lucian a luat 10 lei, Cătălin a luat 10 lei, apoi din nou Lucian și așa mai departe. Lui Cătălin i-a revenit la sfârșit o sumă mai mică decât 10 lei. El a luat acest rest și o curcă de la Lucian, ambii acceptând că au obținut același câștig.

a) Cât costă o curcă? b) Ați putea preciza unic și valoarea lui n ?

Soluție. (oficiu **2p**) a) Suma totală încasată este n^2 . Fie $n = 10k + r$ cu $k, r \in \mathbb{N}$ și $0 \leq r < 10$**2p**

Atunci $n^2 = 100k^2 + 20kr + r^2 = 20k(5k + r) + r^2$**2p**

Însă numărul zecilor lui n^2 este impar deoarece la final Cătălin nu-și mai ia cei 10 lei și atunci cum $r^2 \in \{0; 4; 9; 16; 25; 36; 49; 64; 81\}$**4p**

Rămâne că $r^2 \in \{16; 36\}$, ceea ce înseamnă că în ambele cazuri restul împărțirii lui n^2 la 10 este 6. Deci ultima oară Cătălin ia 6 lei, adică cu 4 lei mai puțin decât Lucian, ceea ce înseamnă că o curcă costă 2 lei.**3p**

b) Nu. Avem $n = 10k + 2$, cu $k = 2p + 1$**2p**