Ministerul Educaţiei, Cercetării şi Inovării
Societatea de Ştiinţe Matematice din Romania

Olimpiada Naţională de Matematică

Primul test de selecţie pentru OBM şi OIM
Iaşi, 8 aprilie 2010

Problema 1. Fie $P_1, P_2, \ldots, P_n$ puncte distincte pe un cerc, $n \geq 3$. Determinaţi numărul maxim de coarde închise $[P_iP_j]$, $i \neq j$, cu proprietatea că oricare două au un punct comun.

Problema 2. Fie numerele reale strict pozitive $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Arătaţi că funcţia $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{a_1 + x}{a_2 + x} + \frac{a_2 + x}{a_3 + x} + \cdots + \frac{a_{n-1} + x}{a_n + x} + \frac{a_n + x}{a_1 + x},$$

este descrescătoare.

Problema 3. Se consideră două dreptunghiuri egale congruente de arie 2, astfel încât suprafeţele acestora se intersectează după un octogon $ABCDEFGH$. Arătaţi că aria patrulaterului $ACEG$ este mai mare sau egală cu 1.

Problema 4. Cercurile γ_1 şi γ_2 se intersectează în punctele M şi N. Fie A un punct situat pe cercul γ_1 şi D un punct situat pe cercul γ_2. Dreptele AM şi AN intersectează a doua oară cercul γ_2 în punctele B, respectiv C. Dreptele DM şi DN intersectează a doua oară cercul γ_1 în punctele E, respectiv F. Punctele A, E şi F sunt situate de aceeaşi parte a dreptei MN. Ştiind că segmentele AB şi DE sunt congruente, arătaţi că punctele A, F, C şi D sunt situate pe un cerc al cărui centru nu depinde de poziţia punctelor A şi D.

Problema 5. Fie n şi a două numere naturale astfel încât a nu are niciun factor prim mai mic sau egal decât n. Arătaţi că $n!$ divide

$$(a-1)(a^2-1)\cdots(a^{n-1}-1).$$

Timp de lucru 4½ ore.
Fiecare problemă este punctată de la 0 la 7 puncte.