Societatea de Ştiinţe Matematice din Romania
Centrul de Excelenţă de la Colegiul Naţional "Sf. Sava"

Olimpiada Naţională de Matematică

Al doilea test de selecţie pentru juniori
Bucureşti, 24 aprilie 2010

Problema 1. Considerăm pe un cerc un număr finit de numerele reale cu suma mai mare strict decât zero. Dintre toate sumele ce au ca termeni numere pe poziţii consecutive pe cerc, fie S cea mai mare sumă şi s cea mai mică sumă. Să se arate că $S + s > 0$.

Problema 2. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_n$ numere reale astfel încât

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$$

şi

$$|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| = 1.$$

Să se arate că:

$$|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \leq \frac{n-1}{2}.$$

Problema 3. Să se determine numerele întregi n, $n \geq 2$, cu proprietatea că numerele $1!, 2!, 3!, \ldots, (n-1)!$ dau resturi diferite la împărţirea cu n.

Notă: $k! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k$, oricare ar fi $k \geq 1$ natural.

Problema 4. Fie ABC un triunghi scalen şi fie I centrul cercului înscris în triunghi. Considerăm cercurile γ, δ de diametre IB, respectiv IC, şi γ', δ' simetricele cercurilor γ, δ faţă de dreptele IC, respectiv IB. Să se demonstreze că centrul cercului circumscris triunghiului ABC aparţine dreptei ce trece prin punctele de intersecţie ale cercurilor γ' şi δ'.

Notă: Laturile unui triunghi scalen **nu** sunt egale.

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este punctată de la 0 la 7 puncte.