Societatea de Ştiinţe Matematice din Romania
Centrul de Excelenţă de la Colegiul Naţional "Sf. Sava"

Olimpiada Naţională de Matematică

Al treilea test de selecţie pentru juniori
Bucureşti, 25 aprilie 2010

Problema 1. Considerăm două triunghiuri echilaterale ABC şi MNP cu proprietatea că $AB \parallel MN$, $BC \parallel NP$ şi $CA \parallel PM$, astfel încât suprafeţele triunghiurilor se intersectează după un hexagon convex. Distanţele dintre cele trei perechi de drepte paralele sunt cel mult egale cu 1. Să se arate că cel puţin unul dintre cele două triunghiuri are latura cel mult egală cu $\sqrt{3}$.

Problema 2. Fie n un număr întreg, $n \geq 2$. Pentru fiecare număr $k = 1, 2, \ldots, n$, notăm cu a_k numărul multiplilor lui k din mulţimea $\{1, 2, \ldots, n\}$ şi fie $x_k = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{a_k}$. Să arate că:

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \leq \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}.$$

Problema 3. Considerăm numerele reale a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 cu suma nulă şi cu proprietatea că $|a_i - a_j| \leq 1$, oricare ar fi $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Să se arate că $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 \leq \frac{6}{5}$.

Problema 4. Considerăm ABC un triunghi, O centrul cercului circumscris triunghiului, H ortocentrul său şi M mijlocul segmentului AH. Perpendiculara în punctul M pe dreapta OM intersectează dreptele AB şi AC în punctele P, respectiv Q. Să se arate că $MP = MQ$.

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este punctată de la 0 la 7 puncte.