Olimpiada Naţională de Matematică

Al doilea test de selecţie pentru OBM şi OIM
Bucureşti, 24 aprilie 2010

Problema 1. Fie n un număr întreg strict pozitiv. Să se determine valoarea minimă a numărului

$$\max\left(\frac{x_1}{1+x_1}, \frac{x_2}{1+x_1+x_2}, \ldots, \frac{x_n}{1+x_1+x_2+\cdots+x_n}\right),$$

unde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt numere reale pozitive, a căror sumă este egală cu 1.

Problema 2. a) Fie k un număr întreg strict pozitiv. Să se demonstreze că nu există două numere întregi distincte din intervalul deschis $(k^2, (k+1)^2)$ al căror produs să fie pătrat perfect.

b) Fie n un număr întreg strict mai mare decât 2. Să se demonstreze că există un număr natural p cu proprietatea că, pentru orice număr întreg k mai mare decât p, în intervalul deschis $(k^n, (k+1)^n)$ există n numere întregi distincte al căror produs să fie puterea de ordin n a unui număr întreg.

Problema 3. Considerăm două cercuri $\mathcal{C}_1$ şi $\mathcal{C}_2$ tangente în punctul P. Prin P se duc două drepte d_1, d_2. Dreapta d_1 intersectează cercul $\mathcal{C}_1$ în B şi cercul $\mathcal{C}_2$ în punctul F, iar dreapta d_2 intersectează cercul $\mathcal{C}_1$ în C şi cercul $\mathcal{C}_2$ în punctul G. Fie A un punct arbitrar, nesituat pe cele două cercuri şi nici pe cele două drepte. Cercul circumscris triunghiului PAB intersectează cercul $\mathcal{C}_2$ în punctul D, iar cercul circumscris triunghiului PAC intersectează $\mathcal{C}_2$ în punctul E. Să se arate că dreptele AP, EF, DG sunt concurente sau paralele.

Problema 4. Fie n un număr întreg mai mare sau egal decât 2. În interiorul pătratului $[0,n]\times[0,n]$ se consideră un poligon convex a cărui arie este strict mai mare decât n. Să se arate că există un punct de coordonate întregi situat în interiorul sau pe laturile poligonului.

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este punctată de la 0 la 7 puncte.