Societatea de Ştiinţe Matematice din Romania

Olimpiada Naţională de Matematică

Al treilea test de selecţie pentru OBM şi OIM
Bucureşti, 25 aprilie 2010

Problema 1. Fie n un număr întreg strict pozitiv şi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ numere reale pozitive astfel încât $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$. Arătaţi că

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^n (1 + x_i) \geq \frac{n}{2^{n-1}} \prod_{i=1}^{n} (1 + x_i).$$

Problema 2. Fie ABC un triunghi astfel încât $AB \neq AC$. Bisectoarele interioare ale unghiurilor ABC şi ACB intersectează laturile opuse în punctele B_0, respectiv C_0, şi cercul circumscris triunghiului ABC în punctele B_1, respectiv C_1. Fie I centrul cercului înscris în triunghiul ABC. Arătaţi că dreptele B_0C_0, B_1C_1 şi paralela prin I la BC sunt concurente.

Problema 3. Fie a un număr întreg strict pozitiv. Arătaţi că există o infinitate de numere întregi m, $m \geq 1$, astfel încât $\sigma(am) < \sigma(am+1)$, unde $\sigma(n)$ este suma tuturor divizorilor pozitivi ai numărului natural $n \geq 1$, inclusiv 1 şi n.

Problema 4. Fie X şi Y două submulţimi finite ale intervalului $[0, 1)$, astfel încât $0 \in X \cap Y$ şi $x + y \neq 1$ oricare ar fi $x \in X$ şi $y \in Y$. Arătaţi că mulţimea

$$\{x + y - \lfloor x + y \rfloor : x \in X \text{ şi } y \in Y\}$$

are cel puţin $|X| + |Y| - 1$ elemente, unde $\lfloor a \rfloor$ este partea întreagă a numărului real a, iar $|A|$ este numărul de elemente ale mulţimii A.

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este punctată de la 0 la 7 puncte.