Universitatea Valahia Târgovişte
Facultatea de Ştiinţe şi Arte
Departamentul de Ştiinţe
Bd. Unirii 18, 130082 Târgovişte
www.valahia.ro fs.valahia.ro

Societatea de Ştiinţe Matematice din România
Filiala Dâmboviţa
Bd. Regele Carol I 62
www.freewebs.com/ssm_dambovita

Concursul de Matematică CHINDIA

Ediţia a VI-a, Târgovişte, 26 Martie 2011

CLASA A IX-A

Subiectul 1. Fie triunghiurile $A_1B_1C_1$ și $A_2B_2C_2$ astfel încât

$$\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{B_1B_2}+\overrightarrow{C_1C_2}=\overrightarrow{H_1H_2}\,,$$

unde H_1, H_2 sunt ortocentrele celor două triunghiuri. Demonstrați că dacă cinci dintre punctele $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ se află pe un cerc, atunci și al șaselea punct se află pe același cerc.

Dinu Teodorescu

Subiectul 2. Fie $a, b, c \in (0,1)$ astfel încât

$$\frac{a-b}{1-ab}\cdot\frac{a}{1-a^2}+\frac{b-c}{1-bc}\cdot\frac{b}{1-b^2}+\frac{c-a}{1-ca}\cdot\frac{c}{1-c^2}=0\,.$$

Demonstrați că $a=b=c$.

Cristinel Mortici

Subiectul 3. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ astfel încât $a+b+c=1$. Demonstrați că

$$(a\sin x+b\cos y+c)^2+(a\sin y+b\cos z+c)^2+(a\sin z+b\cos x+c)^2$$

$$+12(ab+bc+ca)\leq 6.$$

Dinu Teodorescu

Notă: *Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 2 ore.*

Universitatea Valahia Târgovişte
Facultatea de Ştiinţe şi Arte
Departamentul de Ştiinţe
Bd. Unirii 18, 130082 Târgovişte
www.valahia.ro fs.valahia.ro

Societatea de Ştiinţe Matematice din România
Filiala Dâmboviţa
Bd. Regele Carol I 62
www.freewebs.com/ssm_dambovita

Concursul de Matematică CHINDIA

Ediţia a VI-a, Târgovişte, 26 Martie 2011

CLASA A X-A

Subiectul 1. Fie z_1, z_2, z_3 numere complexe de același modul, astfel încât $z_1 + z_2 + z_3 = z_1 z_2 z_3 = 1$. Demonstrați că z_1, z_2, z_3 sunt afixele vârfurilor unui triunghi dreptunghic isoscel.

* * *

Subiectul 2. Demonstrați că

$$\sqrt[5]{1082 + 409\sqrt{7}} + \sqrt[5]{1082 - 409\sqrt{7}} = 4.$$

* * *

Subiectul 3. Fie $x, y, z \in (1, \infty)$ astfel încât $xyz = 10$. Demonstrați că

$$\left(\sqrt{\lg x} + \sqrt{\lg y}\right)\left(\sqrt{\lg y} + \sqrt{\lg z}\right)\left(\sqrt{\lg z} + \sqrt{\lg x}\right) \le \frac{8\sqrt{3}}{3}.$$

Dinu Teodorescu

Notă: *Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 2 ore.*

Universitatea Valahia Târgovişte
Facultatea de Ştiințe şi Arte
Departamentul de Ştiințe
Bd. Unirii 18, 130082 Târgovişte
www.valahia.ro fs.valahia.ro

Societatea de Ştiințe Matematice din România
Filiala Dâmbovița
Bd. Regele Carol I 62
www.freewebs.com/ssm_dambovita

Concursul de Matematică CHINDIA

Ediția a VI-a, Târgovişte, 26 Martie 2011

CLASA A XI-A

Subiectul 1. Arătați că indiferent cum s-ar alege semnele plus și minus, avem

$$\begin{vmatrix} \pm 1 & \pm 3 & \pm 4 \\ \pm 3 & \pm 2 & \pm 5 \\ \pm 4 & \pm 5 & \pm 3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

* * *

Subiectul 2. Fie șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin relația de recurență

$$a_{n+1} = a_n + \frac{a_{n-1}}{a_n}, \quad n = 2,3,4, \ldots,$$

unde $a_1 = 1, a_2 = 2$. Demonstrați că șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este monoton, are limită și

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1.$$

Dinu Teodorescu

Subiectul 3. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție de trei ori derivabilă. Demonstrați că există $c \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(c)f'(c)f''(c)f'''(c) \geq 0$.

* * *

Notă: *Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 2 ore.*

Universitatea Valahia Târgovişte
Facultatea de Ştiinţe şi Arte
Departamentul de Ştiințe
Bd. Unirii 18, 130082 Târgovişte
www.valahia.ro fs.valahia.ro

Societatea de Ştiințe Matematice din România
Filiala Dâmbovița
Bd. Regele Carol I 62
www.freewebs.com/ssm_dambovita

Concursul de Matematică CHINDIA

Ediția a VI-a, Târgovişte, 26 Martie 2011

CLASA A XII-A

Subiectul 1. Fie $f: [1,2] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă având o primitivă F cu

$$\ln(1+x) \leq F(x) \leq x, \quad \forall\, x \in [1,2].$$

Demonstrați că există un interval $(\alpha, \beta) \subset [1,2]$ astfel încât F este strict crescătoare pe (α, β).

Dinu Teodorescu

Subiectul 2. Fie I un inel astfel încât $x^3(xy - yx) = 0$, oricare ar fi $x, y \in I$. Demonstrați că I este inel comutativ.

*** * ***

Subiectul 3. Fie A inelul funcțiilor continue $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ înzestrat cu operațiile obișnuite de adunare și înmulțire. Fie $J \subseteq A$ cu următoarele proprietăți:

a) $(J, +)$ este subgrup al lui $(A, +)$;
b) Dacă $f \in J$ și $g \in A$, atunci $f \cdot g \in J$;
c) Pentru orice $x \in [0,1]$, există $f \in J$ astfel încât $f(x) \neq 0$.

Demonstrați că $J = A$.

Cezar Joița

Notă: *Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru: 2 ore.*