Concursul Florica T. Câmpan

Etapa interjudețeană, Iaşi, 26 martie 2011

Clasa a IV-a

1. În timpul vacanței, Claudiu îşi ajută părinții lucrând la magazinul familiei. Într-una din zile, la magazin se aduc cutii de compot care au înălțimea de 10 centimetri. Claudiu trebuie să le aranjeze pe o masă unele peste altele: pe primul rând de jos pune 12 cutii, pe rândul al doilea 11 cutii, pe următorul rând 10 cutii şi aşa mai departe.

a) De câte cutii de compot are nevoie Claudiu pentru aranjamentul de pe masă? Ce înălțime va avea acest aranjament?

b) Pentru o altă aranjare a cutiilor, Claudiu se hotărăşte să pună 12 cutii pe primul rând de jos, 10 cutii pe al doilea rând şi aşa mai departe, până ce pune două cutii pe ultimul rând de sus. De câte cutii are nevoie Claudiu? Ce înălțime va avea acest nou aranjament?

2. În pătratul de mai jos, produsul numerelor pe fiecare linie, de pe fiecare coloană şi de pe fiecare dintre cele două diagonale este acelaşi şi nenul.

2	a	b
9	6	c
d	e	f

a) Aflați b.

b) Dacă, în plus, $9d+2f=144$, aflați şi celelalte numere.

3. Un număr care nu se împarte exact la niciuna din cifrele sale se numeşte număr *civilizat* (precizăm că niciun număr nu se împarte la 0).

a) Arătați că numerele 52 şi 354 nu sunt civilizate.

b) Claudiu şi Diana au găsit două numere civilizate care înmulțite dau ca rezultat tot un număr civilizat. Reconstituiți înmulțirea găsită de cei doi copii (steluțele înlocuiesc cifre).

$$\begin{array}{r} 2\,3\,*\,\times \\ *\,9 \\ \hline *\,*\,*\,* \end{array}$$

Clasa a V-a

1. O carte *ciudată* are paginile numerotate astfel: 16, 23, 30, 37, 44, … , 2011.

a) Aflați câte foi are cartea ciudată.

b) Determinați câte cifre s-au folosit pentru numerotarea paginilor cărții ciudate.

c) Calculați suma numerelor înscrise pe foaia din mijlocul cărții.

2. Monica este o învățătoare foarte serioasă şi iubită de copiii pe care îi învață. În clasa la care predă are 10 copii pregătiți pentru concursuri, dintre care 7 la matematică şi 6 la limba română. La sfârşitul unei săptămâni au loc trei concursuri: sâmbătă unul de matematică şi unul de limba română (la aceeaşi oră), iar duminică unul de matematică. La fiecare concurs ea trimite câte un singur copil. În câte moduri poate alege participanții la cele trei concursuri?

Ciprian Baghiu

3. a) Arătați că numărul 1006009 este pătrat perfect.

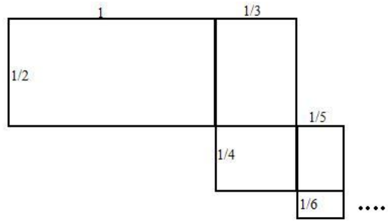
b) Demonstrați că există măcar 2011 pătrate perfecte care nu au ultima cifră egală cu 0 şi care conțin un număr impar de cifre de 0.

c) Arătați că, oricare ar fi cifra b nenulă, numărul $\overline{b\underbrace{000...00}_{\text{2011 cifre de 0}}b}$ nu este pătrat perfect.

Cristian Lazăr

Clasa a VI-a

1. Construim succesiv dreptunghiuri vecine, alternativ spre dreapta şi în jos, ca în figura alăturată. (Două dreptunghiuri se numesc *vecine* dacă au o latură comună.) Laturile dreptunghiurilor au consecutiv lungimile $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$. Arătați că există o grupă de două sau mai multe dreptunghiuri vecine două câte două astfel încât suma ariilor acestora să fie $\frac{1}{3}$.



2. Pe o tablă de şah 8 × 8 se aşează 8 turnuri astfel încât niciunul să nu le atace pe celelalte.
a) Arătați că un astfel de aranjament este posibil.
b) Pentru un astfel de aranjament, arătați că în orice pătrat 5 × 5 există cel puțin două turnuri.

3. Demonstrați că pot fi alese cel mult 671 numere din mulțimea $A = \{1, 2, 3, \ldots 2011\}$ astfel încât diferența oricăror două numere alese să nu dividă suma acestora.

Clasa a VII-a

1. Ioana desenează pe monitorul calculatorului, cu ajutorul unui program de grafică pe computer, un triunghi isoscel *ABC* şi ia punctele *D* pe baza (*BC*) şi *E* pe latura (*AB*) astfel încât $\sphericalangle ADE \equiv \sphericalangle ACB$. Programul folosit îi permite Ioanei să selecteze orice triunghi care apare în desen, să-l mărească sau să-l micşoreze (păstrându-i forma) cu funcția *zoom*, să-i schimbe poziția sau să-l rotească, după dorință. Numim *transformare* o succesiune oarecare de astfel de operații.
a) Demonstrați că Ioana poate găsi o transformare în urma căreia triunghiul *DBE* să se suprapună exact peste triunghiul *ACD*.
b) Observând alte transformări urmate de suprapuneri de triunghiuri în configurația desenată, Ioana redescoperă *relația lui Stewart* pentru triunghiul isoscel: $AB^2 = AD^2 + BD \cdot CD$.

Claudiu Ştefan Popa

2. Se consideră numerele raționale strict pozitive a, b, c, d astfel încât $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.
a) Arătați că $\sqrt{ac} \in \mathbb{Q}$ dacă şi numai dacă $\sqrt{bd} \in \mathbb{Q}$.
b) Demonstrați că $\sqrt{(a+b)(c+d)} \in \mathbb{Q}$ dacă şi numai dacă $\sqrt{ac} \in \mathbb{Q}$.
c) Este adevărată implicația $\sqrt{(a+b)(c+d)} \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{ac} \in \mathbb{N}$? Dar reciproca?

Claudiu Ştefan Popa şi Gabriel Popa

3. Considerăm mulțimea $M = \{-1, -2, -3, \ldots, -2011\}$. Pentru fiecare submulțime nevidă *A* a lui *M*, calculăm produsul P_A al tuturor elementelor sale; dacă $A = \{a\}$, atunci $P_A = a$.
a) Găsiți trei submulțimi distincte *A*, *B* şi *C* ale lui *M*, pentru care $P_A = P_B = P_C$.
b) Care este valoarea cea mai mare pe care o poate lua un astfel de produs? Dar cea mai mică?
c) Calculați suma tuturor produselor care se obțin. (Dacă valoarea unui produs se repetă pentru mai multe submulțimi ale lui *M*, respectiva valoare se va repeta de acelaşi număr de ori şi în sumă.)

Clasa a VIII-a

1. Baronul de Münchhausen spune o obişnuită poveste gogonată despre cum a zburat el pe Lună călare pe o ghiulea trasă dintr-un tun. Oricine şi-ar putea da seama că este o uriaşă minciună, însă puţini puteau şi demonstra acest lucru. În cele din urmă, un copil isteţ de vreo 15 ani a reuşit să afle, studiind diverse specificaţii tehnice, că viteza unei ghiulele ar fi de 200m/s şi, conform legilor fizicii, după $t > 0$ secunde de mişcare, ghiuleaua se află la înălţimea $h(t) = -5t^2 + 200t$. Aflaţi şi voi înălţimea maximă la care ar fi putut ajunge baronul Münchhausen şi timpul total al călătoriei sale călare pe ghiulea.

Marian Panţiruc

2. Fie prisma triunghiulară regulată $A_1A_2A_3B_1B_2B_3$ având toate muchiile, precum şi diagonalele feţelor laterale, colorate cu roşu sau cu albastru. În fiecare triunghi care se formează, exceptând bazele, există atât o latură roşie cât şi o latură albastră. Arătaţi cele şase muchii ale bazelor sunt colorate toate cu aceeaşi culoare.

Gheorghe Iurea

3. Lucian şi Cătălin au vândut împreună, la piaţă, n kilograme carne de curcan, cu valoarea de n euro kilogramul. Ei acţionează succesiv: primul îşi laudă marfa Lucian (până vinde carne în valoare de 10 euro), apoi Cătălin (până vinde şi el în valoare de 10 euro), din nou Lucian etc. Cătălin câştigă la ultima strigare o sumă întreagă, mai mică de 10 euro. Determinaţi acestă sumă.

Doru Buzac şi Gabriel Mîrşanu