Clasa a IX-a

Să se demonstreze următoarele relații:

1. a) $4\cos^2\frac{\pi}{5} - 2\cos\frac{\pi}{5} - 1 = 0$ (4p)

b) $8\cos^3\frac{\pi}{7} - 4\cos^2\frac{\pi}{7} - 4\cos\frac{\pi}{7} + 1 = 0$ (3p)

Soluție a) $\sin\frac{2\pi}{5} = \sin\frac{3\pi}{5} \Rightarrow 2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5} = 3\sin\frac{\pi}{5} - 4\sin^3\frac{\pi}{5}$

$\Leftrightarrow 2\cos\frac{\pi}{5} = 3 - 4\sin^2\frac{\pi}{5} \Leftrightarrow 4\cos^2\frac{\pi}{5} - 2\cos\frac{\pi}{5} - 1 = 0$

b) $\sin\frac{3\pi}{7} = \sin\frac{4\pi}{7} \Rightarrow 3\sin\frac{\pi}{7} - 4\sin^3\frac{\pi}{7} = 4\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}$.

$\Leftrightarrow 3 - 4\sin^2\frac{\pi}{7} = 4\cos\frac{\pi}{7}\left(2\cos^2\frac{\pi}{4} - 1\right) \Leftrightarrow 8\cos^3\frac{\pi}{7} - 4\cos^2\frac{\pi}{7} - 4\cos\frac{\pi}{7} + 1$

2. Demonstrați că: $\frac{x+y}{2} \le \sqrt[n]{\frac{x^n+y^n}{2}}, \forall x,y \in [0,+\infty); n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$

Soluție: Se utilizează metoda inducției complete sau noțiunea de funcție convexă. 7 puncte.

3. Fie ABCD un patrulater și punctele M, N, P, Q astfel încât $2\vec{MA} = -\vec{MB}$, $2\vec{NC} = -\vec{NB}$, $2\vec{PD} = -\vec{PC}$ și $2\vec{QD} = -\vec{QA}$. Să se arate că $MP + QN \le \frac{1}{3}(AB+BC+2CD+2AD)$

Soluție. Deoarece P împarte segmentul orientat $\vec{CD}$ în raportul $k = -2$ rezultă $\vec{MP} = \frac{\vec{MC}+2\vec{MD}}{3} = \frac{1}{3}(\vec{MB}+\vec{BC}+2\vec{MA}+2\vec{AD})$ (2 puncte)

$= \frac{1}{3}(\vec{BC}+2\vec{AD})$. Analog avem: $\vec{QN} = \frac{1}{3}(\vec{AB}+2\vec{DC})$ (2 puncte)

Obținem: $MP+QN = |\vec{MP}|+|\vec{QN}| \le \frac{1}{3}(|\vec{BC}+2\vec{AD}|+|\vec{AB}+2\vec{DC}|)$

$\le \frac{1}{3}(AB+BC+2DC+2AD)$ (3 puncte)

Total 7 puncte.