Clasa a X-a

1. a) Să se demonstreze inegalitatea:

$$\sqrt{a^2-ab+b^2}\geq\frac{a+b}{2},\ \text{unde } a,b>0$$

b) Să se rezolve ecuația:

$$\sqrt{4^x-6^x+9^x}+\sqrt{9^x-3^x+1}+\sqrt{4^x-2^x+1}=2^x+3^x+1$$

Soluție: a) Se ridică relația la pătrat ...etc. 1 punct

b) Se aplică inegalitatea de la punctul a) pentru fiecare termen din membrul stâng al ecuației ... 3 puncte = 1+1+1

Cum egalitate în inegalitatea de la punctul a) avem dacă $a=b$ rezultă că în cazul ecuației de la punctul b) avem:

$$\sqrt{4^x-6^x+9^x}+\sqrt{9^x-3^x+1}+\sqrt{4^x-2^x+1}\geq 2^x+3^x+1$$ cu ... 3 puncte

egalitate dacă $2^x=3^x=1$, adică pentru $x=0$.

În concluzie $x=0$

2) Să se rezolve ecuația: $(\sin x+\sqrt{1+\sin^2 x})(\cos x+\sqrt{1+\cos^2 x})=1$

Soluție. Avem $\cancel{\cos x+\sqrt{1+\sin^2 x}=\frac{1}{\sin x+\sqrt{1+\sin^2 x}}=\sqrt{1+\sin^2 x}-\sin x\Rightarrow}$

$$\cancel{\cos x+\sin x=\sqrt{1+\sin^2 x}-\sqrt{1+\cos^2 x}}$$ ... 2 puncte

$$\cancel{\Rightarrow(\cos x+\sin x)^2=\left(\sqrt{1+\sin^2 x}-\sqrt{1+\cos^2 x}\right)^2\Leftrightarrow\sqrt{(1+\sin^2 x)(1+\cos^2 x)}=(1-\sin x\cos x)^2}$$

Ecuația este echivalentă cu $\sin x+\sqrt{1+\sin^2 x}=\frac{1}{\cos x+\sqrt{1+\cos^2 x}}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\sin x+\cos x=\sqrt{1+\cos^2 x}-\sqrt{1+\sin^2 x}\Rightarrow(\sin x+\cos x)\left(1-\frac{\cos x-\sin x}{\sqrt{1+\sin^2 x}+\sqrt{1+\cos^2 x}}\right)=0$$

--- 3 puncte

$$\left|\frac{\cos x-\sin x}{\sqrt{1+\sin^2 x}+\sqrt{1+\cos^2 x}}\right|\leq\frac{\sqrt{2}}{2}$$ ~~1~~ 2 puncte

de aici paranteza a doua este diferită de zero

Rămâne $\sin x+\cos x=0\Rightarrow \operatorname{tg} x=-1\Rightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$ --- 2 puncte

Clasa a X-a

3. Se consideră triunghiul ABC și fie G centrul său de greutate. Să se arate că pentru orice punct V din spațiu avem:

a) $\vec{VG} = \frac{1}{3}(\vec{VA} + \vec{VB} + \vec{VC})$

b) $3(\vec{VA}^2 + \vec{VB}^2 + VC^2) \geq AB^2 + BC^2 + CA^2$

Soluție a) Se utilizează relația: $\vec{VG} = \frac{\vec{VA} + 2\vec{VA'}}{3}$ (A' este mijlocul segmentului BC. Apoi $\vec{VA'} = \frac{\vec{VB} + \vec{VC}}{2}$ ... 2 puncte

b) Se ridică relația de la punctul a) la pătrat.

.... 2 puncte

și se aplică teorema cosinusului în triunghiurile $\triangle VAB$, $\triangle VBC$, $\triangle VCA$ --- 2 puncte

Egalitate avem dacă $V = G$ ---- 1 punct