

Clasa a \bar{x} -a

1. a) Să se demonstreze inegalitatea:

$$\sqrt{a^2 - ab + b^2} \geq \frac{a+b}{2}, \text{ unde } a, b > 0$$

b) Să se rezolve ecuația:

$$\sqrt{4^x - 6^x + 9^x} + \sqrt{9^x - 3^x + 1} + \sqrt{4^x - 2^x + 1} = 2^x + 3^x + 1$$

Soluție: a) Se ridică relația la pătrat...etc. 1 punct

b) Se aplică inegalitatea de la punctul a)

pentru fiecare termen din membru stâng al ecuației... 3 puncte = 1+1+1

Cum egalitate în inegalitatea de la punctul a) avem dacă $a = b$ rezultă că în cazul ecuației de la punctul b) avem:

$$\sqrt{4^x - 6^x + 9^x} + \sqrt{9^x - 3^x + 1} + \sqrt{4^x - 2^x + 1} \geq 2^x + 3^x + 1 \text{ cu } \dots \text{ 3 puncte}$$

egalitate dacă $2^x = 3^x = 1$, adică pentru $x = 0$.
 În concluzie $x = 0$

2) Să se rezolve ecuația: $(\sin x + \sqrt{1 + \sin^2 x})(\cos x + \sqrt{1 + \cos^2 x}) = 1$

Soluție. Avem $\cos x + \sqrt{1 + \cos^2 x} = \frac{1}{\sin x + \sqrt{1 + \sin^2 x}} = \sqrt{1 + \cos^2 x} - \sin x \Rightarrow$

$$\cos x + \sin x = \sqrt{1 + \sin^2 x} - \sqrt{1 + \cos^2 x} \text{ --- 2 puncte}$$

$$\Rightarrow (\cos x + \sin x)^2 = (\sqrt{1 + \sin^2 x} - \sqrt{1 + \cos^2 x})^2 \Leftrightarrow \sqrt{(1 + \sin^2 x)(1 + \cos^2 x)} = (1 - \sin x \cos x)$$

Ecuația este echivalentă cu $\sin x + \sqrt{1 + \sin^2 x} = \frac{1}{\cos x + \sqrt{1 + \cos^2 x}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sin x + \cos x = \sqrt{1 + \cos^2 x} - \sqrt{1 + \sin^2 x} \Rightarrow (\sin x + \cos x) \left(1 - \frac{\cos x - \sin x}{\sqrt{1 + \sin^2 x} + \sqrt{1 + \cos^2 x}} \right) = 0$$

--- 3 puncte

$$\left| \frac{\cos x - \sin x}{\sqrt{1 + \sin^2 x} + \sqrt{1 + \cos^2 x}} \right| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ --- 2 puncte}$$

de aici paranteza a doua este diferită de zero

Rămân $\sin x + \cos x = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \text{ --- 2 puncte}$

Clasa a 8-a

3. Se consideră triunghiul ABC și fie G centrul său de greutate. Să se arate că pentru orice punct V din spațiul artem:

a) $\vec{VG} = \frac{1}{3}(\vec{VA} + \vec{VB} + \vec{VC})$

b) $3(\vec{VA}^2 + \vec{VB}^2 + \vec{VC}^2) \geq AB^2 + BC^2 + CA^2$

Soluție a) Se utilizează relația: $\vec{VG} = \frac{\vec{VA} + 2\vec{VA'}}{3}$ (A' este mijlocul segmentului BC). Atunci $\vec{VA'} = \frac{\vec{VB} + \vec{VC}}{2}$... (2 puncte)

b) Se ridică relația de la punctul a) la pătrat.

și se aplică teorema cosinusului în triunghiurile $\triangle VAB, \triangle VBC, \triangle VCA$... (2 puncte)

egalitate artem dacă $V=G$... (1 punct)