Clasa a XI

Problema 1

Prin logaritmare inegalitatea se mai scrie:

$$\frac{\ln 3 - \ln e}{3-e} \geq \frac{\ln \pi - \ln 3}{\pi - 3}$$. Aplicând T. lui Lagrange

funcției $\ln x$ există $c_1 \in [e;3]$ și $c_2 \in [3,\pi]$ astfel încât

$$\frac{\ln 3 - \ln 2}{3-e} = \frac{1}{c_1} \text{ și } \frac{\ln \pi - \ln 3}{\pi - 3} = \frac{1}{c_2}$$ ... 4 puncte.

Cum $c_1 < c_2$ și $\frac{1}{c_1} > \frac{1}{c_2}$ rezultă inegalitatea din enunț este adevărată ... 3 puncte.

Problema 2

Să se determine funcțiile continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea: $x^2 f(x) = f(x^2)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Soluție. Dacă înlocuim pe x cu x^2 $\Rightarrow x f(x^{\frac{1}{2}}) = f(x)$ 2 puncte

$$x^{\frac{1}{2}} f(x^{\frac{1}{4}}) = f(x^{\frac{1}{2}})$$

$$x^{\frac{1}{2^n}} f(x^{\frac{1}{2^{n+1}}}) = f(x^{\frac{1}{2^n}})$$

Prin înmulțire membru cu membru obținem:

$$x^{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2^n}} f(x^{\frac{1}{2^{n+1}}}) = f(x)$$ 2 puncte

Folosind continuitatea și trecerea la limită 3 puncte.

$$f(x) = x^2 f(1)$$

Problema 3

Să se ridice la puterea $n \in \mathbb{N}$, matricele: a) $A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ a) prin inducție. $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n\sqrt{2} & n^2 \\ 0 & 1 & n\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ... 3 puncte

b) $A_1 = B + I_3$ unde $B = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$$A_1^n = (B + I_3)^n = (B + \sqrt{3} I_3)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B^k (\sqrt{3} I_3)^{n-k} = \sqrt{3^n} I_3 + n\sqrt{3}^{n-1} B + \frac{n(n-1)}{2} (\sqrt{3})^{n-2} B^2$$

deoarece $B^3 = O_3$, $B^4 = O_3$, ...