

Problema 1

Soluție I. Fie  $x \in \mathbb{R}$  din  $x + f(x) \in \mathbb{R} \Rightarrow f(x) \in \mathbb{R}$   
 Având ca punct de referință  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  care va fi un  
 endomorfism al corpului  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  se știe că singurul  
 endomorfism al corpului  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  este  $f(x) = x$ .

(\*)  $x \in \mathbb{R}$  - - - - - 3 puncte

ii. Fie  $x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  și să notăm  $\lambda = x + f(x) \in \mathbb{R}$ ,  $\mu = x f(x) \in \mathbb{R}$

Numerele reale  $\lambda$  și  $\mu$  sunt rădăcinile polinomului

$$P = x^2 - \lambda x + \mu \in \mathbb{R}[x] \text{ - - - - - 2 puncte}$$

Acest polinom are coeficienți reali; are rădăcini  $x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ,  
 prin urmare are și rădăcina conjugată  $\bar{x}$ . Având

$$f(x) = \bar{x}, \forall x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \text{ - - - - - 4 puncte}$$

dar la cazul I) am văzut că  $f(x) = x = \bar{x}, \forall x \in \mathbb{R}$ .

$$\text{Rezultă } f(x) = \bar{x}, \forall x \in \mathbb{C}. \text{ - - - - - 1 punct}$$

Problema 2

Fie  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție de două ori derivabilă

Folosim metodele inducției matematice

$$\text{Avem: } n^2 \int_0^1 x^n f(x) dx = \frac{n^2}{n+1} \int_0^1 (x^{n+1})' f(x) dx = \frac{n^2}{n+1} x^{n+1} f(x) \Big|_0^1 - \frac{n^2}{n+1} \int_0^1 x^{n+1} f'(x) dx$$

$$= -\frac{n^2}{n+1} \int_0^1 x^{n+1} f'(x) dx = -\frac{n^2}{(n+1)(n+2)} \int_0^1 (x^{n+2})' f'(x) dx = -\frac{n^2}{(n+1)(n+2)} x^{n+2} f'(x) \Big|_0^1 +$$

$$\frac{n^2}{(n+1)(n+2)} \int_0^1 x^{n+2} f''(x) dx = -\frac{n^2}{(n+1)(n+2)} f'(1) + \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} \int_0^1 x^{n+2} f''(x) dx, \forall n \in \mathbb{N}, 3 \leq n$$

din  $f''$  mărginită  $\Rightarrow (\exists) M > 0$  astfel încât  $|f''(x)| \leq M \forall x \in [0, 1]$

$$\Rightarrow \left| \int_0^1 x^{n+2} f''(x) dx \right| \leq \int_0^1 x^{n+2} |f''(x)| dx \leq M \int_0^1 x^{n+2} dx = \frac{M}{n+3} \forall n \in \mathbb{N}$$

Cu criteriul mărginirii  $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^{n+2} f''(x) dx = 0$  - - - - - 2 puncte

$$\text{din relația } n^2 \int_0^1 x^n f(x) dx = -\frac{n^2}{(n+1)(n+2)} f'(1) + \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} \int_0^1 x^{n+2} f''(x) dx, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{deducem } \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \int_0^1 x^n f(x) dx = -f'(1) \text{ - - - - - 1 punct}$$

Problema 3

Soluția Cu substituția  $t = \frac{\pi}{2} - x$  obținem  $I = -I \Rightarrow I = 0$