Clasa a XII-a

Problema 1

Soluţie. I. Fie $\boxed{x\in\mathbb{R}}$ din $x+f(x)\in\mathbb{R} \Rightarrow f(x)\in\mathbb{R}$

Aşa-dar putem vorbi de restricţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care va fi un endomorfism al corpului $(\mathbb{R},+,\cdot)$. Se ştie că singurul endomorfism al corpului $(\mathbb{R},+,\cdot)$ este $1_{\mathbb{R}}$, prin urmare $f(x)=x$, $(\forall)x\in\mathbb{R}$. ---- 3 puncte

II. Fie $x\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ şi să notăm $s=x+f(x)\in\mathbb{R}$, $p=x f(x)\in\mathbb{R}$

Numerele x şi $f(x)$ sunt rădăcinile polinomului

$$P=X^2-sX+p\in\mathbb{R}[X] \quad ---- \text{ 2 puncte}$$

Acest polinom cu coeficienţi reali are rădăcina $x\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, prin urmare are şi rădăcina conjugată $\overline{x}$. Aşadar

$$f(x)=\overline{x},\ \forall x\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R} \quad ---- \text{ 1 puncte}$$

Dar la cazul I) am văzut că $f(x)=x=\overline{x}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Rezultă $f(x)=\overline{x}$, $\forall x\in\mathbb{C}$. ---- 1 punct

Problema 2

~~Fie $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ o funcţie de două ori derivabilă~~

~~Folosim metoda inducţiei matem~~

Avem: $n^2\int_0^1 x^n f(x)dx = \frac{n^2}{n+1}\int_0^1 (x^{n+1})' f(x)dx = \frac{n^2}{n+1}x^{n+1}f(x)\Big|_0^1 - \frac{n^2}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}f'(x)dx$

$= -\frac{n^2}{n+1}\int_0^1 x^{n+1}f'(x)dx = -\frac{n^2}{(n+1)(n+2)}\int_0^1 (x^{n+2})'f'(x)dx = -\frac{n^2}{(n+1)(n+2)}x^{n+2}f'(x)\Big|_0^1 +$

$\frac{n^2}{(n+1)(n+2)}\int_0^1 x^{n+2}f''(x)dx = -\frac{n^2}{(n+1)(n+2)}f'(1) + \frac{n^2}{(n+1)(n+2)}\int_0^1 x^{n+2}f''(x)dx$, $(\forall)\, n\in\mathbb{N}$ ... 3 p.

din f'' mărginită $\Rightarrow (\exists)\, M>0$ astfel încât $|f''(x)|\le M$ $\forall x\in[0,1]$

$\Rightarrow \left|\int_0^1 x^{n+2}f''(x)dx\right| \le \int_0^1 x^{n+2}|f''(x)|dx \le M\int_0^1 x^{n+2}dx = \frac{M}{n+3}$ $\forall n\in\mathbb{N}$ ---- 2 puncte

Cu criteriul majorării $\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^{n+2}f''(x)=0$ ---- 1 punct.

Din relaţia $n^2\int_0^1 x^n f(x)dx = -\frac{n^2}{(n+1)(n+2)}f'(1) + \frac{n^2}{(n+1)(n+2)}\int_0^1 x^{n+2}f''(x)dx$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$

deducem $\lim_{n\to\infty} n^2\int_0^1 x^n f(x) = -f'(1)$ ---- 1 punct

Problema 3

Soluţie Cu substituţia $t=\frac{\pi}{2}-x$ obţinem $I=-I \Rightarrow I=0$