

Clasa a VII-a

1. Se dă triunghiul ABC . Arătați că există și sunt unice punctele $D \in (AB)$, $E \in (BC)$ și $F \in (AC)$ astfel încât patrulaterul $ADEF$ să fie romb. Dacă notăm cu S aria rombului, demonstrați că $S \leq \frac{AB \cdot AC}{4}$ și precizați când se realizează egalitatea.

Constantin Apostol

2. Fie $n \geq 2$ un număr natural. Demonstrați că dacă numerele întregi x_1, x_2, \dots, x_n au proprietatea că $|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| - |x_1 + x_2 + \dots + x_n| = 2$, atunci cel puțin unul dintre numerele x_1, x_2, \dots, x_n este egal cu 1 sau cu -1 .

Romeo Ilie

3. Aflați numerele naturale n cu proprietatea că numărul $8\underbrace{00\dots0}_n 1$ este pătrat perfect.

Dorel Miheț

4. În interiorul triunghiului ABC se ia punctul K și se realizează următoarea construcție:

- prin K se duce o paralelă la AC care taie BC în punctul M_1 ,
- prin M_1 se duce o paralelă la AB care taie AC în punctul N_1 ,
- prin N_1 se duce o paralelă la BC care taie AB în punctul P_1 .

Se continuă construcția (prin P_1 se duce o paralelă la AC care taie BC în punctul M_2, \dots).

Să se precizeze poziția punctului K astfel încât prin procedeul indicat:

- a) să se obțină cel mai mare număr de triunghiuri,
- b) să se obțină cel mai mare număr de triunghiuri congruente, respectând cerința precedentă,
- c) să se obțină cel mai mare număr de triunghiuri congruente.

Horea Banea

Clasa a VIII-a

1. Dacă a, b, c, x, y, z sunt numere strict pozitive, atunci:

$$\begin{aligned} a \cdot \frac{\sqrt{x^2 + xy + y^2}}{xy} + b \cdot \frac{\sqrt{y^2 + yz + z^2}}{yz} + c \cdot \frac{\sqrt{z^2 + zx + x^2}}{zx} \\ \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{a+c}{x} + \frac{b+a}{y} + \frac{b+c}{z} \right). \end{aligned}$$

D.M. Bătinețu-Giurgiu

2. Se dă patrulaterul convex $ABCD$. În punctele M, N, P, Q , mijloacele laturilor $(AB), (BC), (CD), (DA)$ se ridică perpendiculare pe planul patrulaterului și se iau pe ele, de aceeași parte a planului punctele M_1, N_1, P_1, Q_1 , astfel încât $MM_1 = AB, NN_1 = BC, PP_1 = CD, QQ_1 = DA$. Să se arate că punctele M_1, N_1, P_1, Q_1 sunt coplanare dacă și numai dacă patrulaterul $ABCD$ este circumscriptibil.

Constantin Apostol

3. Determinați numerele naturale nenule x, y și numărul prim p dacă

$$x^{2011} + y^{2011} = pxy.$$

Aurel Bârsan

4. a) Să se demonstreze că în triunghiul ABC avem $m(\widehat{A}) = 60^\circ$ dacă și numai dacă $BC^2 = AB^2 + AC^2 - AB \cdot AC$.

- b) Se consideră prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$. Să se demonstreze că planele $A'BC$ și $C'AB$ sunt perpendiculare dacă $AA' = \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot AB$.

Romeo Ilie

Clasa a IX-a

1. Fie A o submulțime nevidă a lui \mathbb{R} și $f, g : A \rightarrow A$ două funcții cu proprietățile:

(i) f este strict crescătoare pe A ;

(ii) $f(x) \leq g(x), \forall x \in A$;

(iii) $\{f(x)|x \in A\} \subset \{g(x)|x \in A\}$.

a) Demonstrați că, dacă $A = \mathbb{N}$, atunci $f = g$.

b) Rămâne valabilă concluzia de la a) dacă $A = \mathbb{Z}$?

Dorel Miheț

2. a) Pe cercul de centru O se consideră punctele distincte A, B, C, D astfel încât $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = \vec{0}$. Să se arate că punctele A, B, C, D sunt vârfurile unui dreptunghi.

b) Să se demonstreze că, dacă numerele reale x, y, z, t îndeplinesc condițiile $\sin x + \sin y + \sin z + \sin t = 0$ și $\cos x + \cos y + \cos z + \cos t = 0$, atunci, pentru orice număr întreg n , are loc relația

$$\sin(2n+1)x + \sin(2n+1)y + \sin(2n+1)z + \sin(2n+1)t = 0.$$

Aurel Bârsan

3. Fie $n \geq 2$ numere naturale nenule a_1, a_2, \dots, a_n .

a) Să se arate că $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \geq a_1a_2 + a_2a_3 + \dots + a_{n-1}a_n + a_na_1$, cu egalitate dacă și numai dacă $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

b) Să se demonstreze că, dacă n este pătrat perfect, iar ecuația

$$x^2 - (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 + 1)x + a_1a_2 + a_2a_3 + \dots + a_{n-1}a_n + a_na_1 = 0$$

admite o rădăcină naturală nenulă, atunci ambele rădăcini ale ecuației sunt numere naturale pătrate perfecte.

4. Să se demonstreze că, pentru orice numere $a, b, c > 0$ și $\lambda \geq 1$, are loc inegalitatea

$$\frac{a^{\lambda+1}}{b^\lambda + c^\lambda} + \frac{b^{\lambda+1}}{c^\lambda + a^\lambda} + \frac{c^{\lambda+1}}{a^\lambda + b^\lambda} \geq \frac{3}{2} \sqrt{\frac{a^{\lambda+1} + b^{\lambda+1} + c^{\lambda+1}}{a^{\lambda-1} + b^{\lambda-1} + c^{\lambda-1}}}.$$

Mihaly Bencze

Clasa a X-a

1. Să se rezolve ecuația

$$2^{x+1} = 2^{[x]} + 2^{\{x\}}.$$

Aurel Bârsan

2. Fie o mulțime finită $A \subset \mathbb{R}$ și două funcții $f, g : A \rightarrow A$. Să se demonstreze că mulțimile

$$U = \{x \in A \mid g(f(x)) \neq x\} \text{ și } V = \{x \in A \mid f(g(x)) \neq x\}$$

au același număr de elemente.

Cristinel Mortici

3. Să se demonstreze că, dacă în triunghiul ABC avem $m(\hat{A}) \geq 90^\circ$, atunci $R \sin A > 2r$.

Romeo Ilie

4. Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $r \in \{0, 1, \dots, 2^n - 1\}$ și $m \in \mathbb{N}$, $m \geq n$. Se alege la întâmplare un număr $\overline{a_m \cdots a_1}$, de m cifre, cu $a_i \in \{1, 2\}$, $i = \overline{1, m}$. Care este probabilitatea ca acesta să dea restul r la împărțirea la 2^n ?

Dorel Miheț

Clasa a XI-a

1. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ și $p, q \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că, dacă $A^p B = O_n$ și $(A + I_n)^q B = O_n$, atunci $B = O_n$.

D.M. Bătinețu-Giurgiu

2. Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ două matrice nilpotente, diferite de matricea nulă, astfel încât $AB = BA$. Să se arate că:

a) $AB = O_2$;

b) există $\alpha \in \mathbb{R}^*$ astfel ca $A = \alpha B$.

(Matricea $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ este nilpotentă dacă există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $M^n = O_2$.)

Dorel Miheț

3. Fie $f, g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții continue având proprietatea că $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$. Să se demonstreze că există o infinitate de numere naturale k pentru care funcția $h_k : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $h_k(x) = f(k + \{g(x)\})$, $\forall x \geq 0$, nu are limită la ∞ . ($\{a\}$ desemnează partea fracționară a numărului real a .)

Romeo Ilie

4. a) Să se dea un exemplu de șir $(a_n)_{n \geq 1}$, cu termeni pozitivi, astfel ca șirul $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$, $n \in \mathbb{N}^*$, să fie convergent, iar șirul $(n^x a_n)_{n \geq 1}$ să fie nemărginit, pentru oricare $x > 0$.

b) Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ un șir cu termeni pozitivi, cu $a_{n+1} \leq (\sum_{k=1}^n a_k) / n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Să se demonstreze că următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) există $x > 0$ astfel încât șirul $S_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k^x$, $n \in \mathbb{N}^*$, este convergent;

(ii) există $x > 0$ astfel ca $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^x a_n) = 0$.

Eugen Păltănea

Clasa a XII-a

1. Fie numerele reale $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$. Arătați că există grupuri (G, \star) , cu $G \subset \mathbb{R}$, astfel ca $a + \frac{b}{c} \in G$, $a + \frac{c}{b} \in G$ sunt inverse unul altuia față de operația \star .

D.M. Bătinețu-Giurgiu

2. Calculați

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\pi}^{2\pi} \frac{|\sin nx + \cos nx|}{x} dx.$$

Gabriela Boeriu

3. Determinați funcțiile derivabile $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ cu f' continuă, având proprietatea că funcția $e^{-x}f(x)$ este descrescătoare pe intervalul $[0, 1]$, este crescătoare pe intervalul $[1, 2]$ și

$$\int_0^2 xf(x)dx = f(0) + f(2).$$

Cristinel Mortici

4. Fie $(K, +, \cdot)$ un corp finit.

a) Demonstrați că dacă $|K| = 12k + 1$ ($k \in \mathbb{N}^*$), atunci există $a \in K$, astfel încât polinomul $f = X^3 + a$ să fie ireductibil în $K[X]$.

b) Rămâne adevărată proprietatea de la punctul a) dacă $|K| = 12k - 1$ ($k \in \mathbb{N}^*$) ?

Dorel Miheț