Concursul naţional de matematică "Laurenţiu Duican"
Ediţia a XVII-a, Braşov, 20 mai 2011

Clasa a VII-a

1. Se dă triunghiul ABC. Arătaţi că există şi sunt unice punctele $D \in (AB)$, $E \in (BC)$ şi $F \in (AC)$ astfel încât patrulaterul $ADEF$ să fie romb. Dacă notăm cu S aria rombului, demonstraţi că $S \leq \frac{AB \cdot AC}{4}$ şi precizaţi când se realizează egalitatea.

Constantin Apostol

2. Fie $n \geq 2$ un număr natural. Demonstraţi că dacă numerele întregi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ au proprietatea că $|x_1|+|x_2|+\ldots+|x_n|-|x_1+x_2+\ldots+x_n| = 2$, atunci cel puţin unul dintre numerele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ este egal cu 1 sau cu -1.

Romeo Ilie

3. Aflaţi numerele naturale n cu proprietatea că numărul $8\underbrace{00\ldots0}_{n \text{ de } 0}1$ este pătrat perfect.

Dorel Miheţ

4. In interiorul triunghiului ABC se ia punctul K şi se realizează următoarea construcţie:

- prin K se duce o paralelă la AC care taie BC în punctul M_1,
- prin M_1 se duce o paralelă la AB care taie AC în punctul N_1,
- prin N_1 se duce o paralelă la BC care taie AB în punctul P_1.

Se continuă construcţia (prin P_1 se duce o paralelă la AC care taie BC în punctul M_2,...).

Să se precizeze poziţia punctului K astfel încât prin procedeul indicat:

a) să se obţină cel mai mare număr de triunghiuri,

b) să se obţină cel mai mare număr de triunghiuri congruente, respectând cerinţa precedentă,

c) să se obţină cel mai mare număr de triunghiuri congruente.

Horea Banea

Clasa a VIII-a

1. Dacă a, b, c, x, y, z sunt numere strict pozitive, atunci:

$$a \cdot \frac{\sqrt{x^2+xy+y^2}}{xy} + b \cdot \frac{\sqrt{y^2+yz+z^2}}{yz} + c \cdot \frac{\sqrt{z^2+zx+x^2}}{zx}$$
$$\geq \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{a+c}{x} + \frac{b+a}{y} + \frac{b+c}{z}\right).$$

D.M. Bătineţu-Giurgiu

2. Se dă patrulaterul convex $ABCD$. In punctele M, N, P, Q, mijloacele laturilor (AB), (BC), (CD), (DA) se ridică perpendiculare pe planul patrulaterului şi se iau pe ele, de aceaşi parte a planului punctele M_1, N_1, P_1, Q_1, astfel încât $MM_1 = AB$, $NN_1 = BC$, $PP_1 = CD$, $QQ_1 = DA$. Să se arate că punctele M_1, N_1, P_1, Q_1 sunt coplanare dacă şi numai dacă patrulaterul $ABCD$ este circumscriptibil.

Constantin Apostol

3. Determinaţi numerele naturale nenule x, y şi numărul prim p dacă

$$x^{2011} + y^{2011} = pxy.$$

Aurel Bârsan

4. a) Să se demonstreze că în triunghiul ABC avem $\mathrm{m}(\widehat{A}) = 60^\circ$ dacă şi numai dacă $BC^2 = AB^2 + AC^2 - AB \cdot AC$.

b) Se consideră prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$. Să se demonstreze că planele $A'BC$ şi $C'AB$ sunt perpendiculare dacă $AA' = \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot AB$.

Romeo Ilie

Concursul naţional de matematică "Laurenţiu Duican"
Ediţia a XVII-a, Braşov, 20 mai 2011

Clasa a IX-a

1. Fie A o submulţime nevidă a lui $\mathbb{R}$ şi $f, g : A \to A$ două funcţii cu proprietăţile:

(i) f este strict crescătoare pe A;

(ii) $f(x) \le g(x),\ \forall\ x \in A$;

(iii) $\{f(x)|x \in A\} \subset \{g(x)|x \in A\}$.

a) Demonstraţi că, dacă $A = \mathbb{N}$, atunci $f = g$.
b) Rămâne valabilă concluzia de la a) dacă $A = \mathbb{Z}$?

Dorel Miheţ

2. a) Pe cercul de centru O se consideră punctele distincte $A,\ B,\ C,\ D$ astfel încât $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{0}$. Să se arate că punctele $A,\ B,\ C,\ D$ sunt vârfurile unui dreptunghi.

b) Să se demonstreze că, dacă numerele reale $x,\ y,\ z,\ t$ îndeplinesc condiţiile $\sin x + \sin y + \sin z + \sin t = 0$ şi $\cos x + \cos y + \cos z + \cos t = 0$, atunci, pentru orice număr întreg n, are loc relaţia

$$\sin(2n+1)x + \sin(2n+1)y + \sin(2n+1)z + \sin(2n+1)t = 0.$$

Aurel Bârsan

3. Fie $n \ge 2$ numere naturale nenule $a_1, a_2, \cdots, a_n$.

a) Să se arate că $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \ge a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_{n-1}a_n + a_na_1$, cu egalitate dacă şi numai dacă $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

b) Să se demonstreze că, dacă n este pătrat perfect, iar ecuaţia

$$x^2 - (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 + 1)x + a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_{n-1}a_n + a_na_1 = 0$$

admite o rădăcină naturală nenulă, atunci ambele rădăcini ale ecuaţiei sunt numere naturale pătrate perfecte.

***

4. Să se demonstreze că, pentru orice numere $a, b, c > 0$ şi $\lambda \ge 1$, are loc inegalitatea

$$\frac{a^{\lambda+1}}{b^\lambda + c^\lambda} + \frac{b^{\lambda+1}}{c^\lambda + a^\lambda} + \frac{c^{\lambda+1}}{a^\lambda + b^\lambda} \ge \frac{3}{2}\sqrt{\frac{a^{\lambda+1} + b^{\lambda+1} + c^{\lambda+1}}{a^{\lambda-1} + b^{\lambda-1} + c^{\lambda-1}}}.$$

Mihaly Bencze

Concursul naţional de matematică "Laurenţiu Duican"
Ediţia a XVII-a, Braşov, 20 mai 2011

Clasa a X-a

1. Să se rezolve ecuaţia

$$2^{x+1} = 2^{[x]} + 2^{\{x\}}.$$

Aurel Bârsan

2. Fie o mulţime finită $A \subset \mathbb{R}$ şi două funcţii $f, g : A \to A$. Să se demonstreze că mulţimile

$$U = \{x \in A \,|\, g(f(x)) \neq x\} \text{ şi } V = \{x \in A \,|\, f(g(x)) \neq x\}$$

au acelaşi număr de elemente.

Cristinel Mortici

3. Să se demonstreze că, dacă în triunghiul ABC avem $m\left(\hat{A}\right) \geq 90°$, atunci $R \sin A > 2r$.

Romeo Ilie

4. Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $r \in \{0, 1, \cdots, 2^n - 1\}$ şi $m \in \mathbb{N}$, $m \geq n$. Se alege la întâmplare un număr $\overline{a_m \cdots a_1}$, de m cifre, cu $a_i \in \{1, 2\}$, $i = \overline{1, m}$. Care este probabilitatea ca acesta să dea restul r la împărţirea la 2^n?

Dorel Miheţ

Concursul naţional de matematică ”Laurenţiu Duican”
Ediţia a XVII-a, Braşov, 20 mai 2011

Clasa a XI-a

1. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ şi $p, q \in \mathbb{N}^*$. Să se arate că, dacă $A^p B = O_n$ şi $(A + I_n)^q B = O_n$, atunci $B = O_n$.

D.M. Bătineţu-Giurgiu

2. Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ două matrice nilpotente, diferite de matricea nulă, astfel încât $AB = BA$. Să se arate că:
a) $AB = O_2$;
b) există $\alpha \in \mathbb{R}^*$ astfel ca $A = \alpha B$.
(Matricea $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ este nilpotentă dacă există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $M^n = O_2$.)

Dorel Miheţ

3. Fie $f, g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ două funcţii continue având proprietatea că $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$. Să se demonstreze că există o infinitate de numere naturale k pentru care funcţia $h_k : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $h_k(x) = f(k+\{g(x)\})$, $\forall\, x \geq 0$, nu are limită la ∞. ($\{a\}$ desemnează partea fracţionară a numărului real a.)

Romeo Ilie

4. a) Să se dea un exemplu de şir $(a_n)_{n\geq 1}$, cu termeni pozitivi, astfel ca şirul $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$, $n \in \mathbb{N}^*$, să fie convergent, iar şirul $(n^x a_n)_{n\geq 1}$ să fie nemărginit, pentru oricare $x > 0$.

b) Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir cu termeni pozitivi, cu $a_{n+1} \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k\right)/n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Să se demonstreze că următoarele afirmaţii sunt echivalente:
(i) există $x > 0$ astfel încât şirul $S_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k^x$, $n \in \mathbb{N}^*$, este convergent;
(ii) există $x > 0$ astfel ca $\lim\limits_{n\to\infty} (n^x a_n) = 0$.

Eugen Păltănea

Concursul naţional de matematică "Laurenţiu Duican"
Ediţia a XVII-a, Braşov, 20 mai 2011

Clasa a XII-a

1. Fie numerele reale $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$. Arătaţi că există grupuri $(G, \star)$, cu $G \subset \mathbb{R}$, astfel ca $a + \frac{b}{c} \in G$, $a + \frac{c}{b} \in G$ sunt inverse unul altuia faţă de operaţia $\star$.

D.M. Bătineţu-Giurgiu

2. Calculaţi

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\pi}^{2\pi} \frac{|\sin nx + \cos nx|}{x} dx.$$

Gabriela Boeriu

3. Determinaţi funcţiile derivabile $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ cu f' continuă, având proprietatea că funcţia $e^{-x} f(x)$ este descrescătoare pe intervalul $[0, 1]$, este crescătoare pe intervalul $[1, 2]$ şi

$$\int_0^2 xf(x)dx = f(0) + f(2).$$

Cristinel Mortici

4. Fie $(K, +, \cdot)$ un corp finit.

a) Demonstraţi că dacă $|K| = 12k + 1$ ($k \in \mathbb{N}^\star$), atunci există $a \in K$, astfel încât polinomul $f = X^3 + a$ să fie ireductibil in $K[X]$.

b) Rămâne adevărată proprietatea de la punctul a) dacă $|K| = 12k - 1$ ($k \in \mathbb{N}^\star$) ?

Dorel Miheţ