Concursul Naţional de Matematică "Arhimede"
Ediţia a VIII-a, Etapa finală 9 aprilie 2011
Clasa a IX-a

I. Fie $a=\sqrt{8}-\sqrt{5}$ şi $b=\sqrt{7}-\sqrt{6}$. Considerăm şirul $x_n=a^n+b^n$, $n\geq 1$.

(3p) **1)** Să se calculeze a^2-b^2.

(3p) **2)** Să se precizeze care dintre numerele a şi b este mai mare.

(3p) **3)** Să se arate că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este descrescător.

II. Fie ABC un triunghi dreptunghic cu unghiul drept în A. Să notăm cu a, b, c lungimile laturilor triunghiului şi să presupunem că $c\leq b<a$.

Să notăm $x=\sin B+\sin C$ şi $y=tgB+tgC$.

(4p) **1)** Dacă c, b şi a sunt în progresie aritmetică să se calculeze x şi y.

(5p) **2)** Dacă c, b şi a sunt în progresie geometrică, să se calculeze x şi y. Să se arate că x şi y, astfel determinaţi, sunt numere iraţionale.

Georgeta Alexandrescu

III. Pentru orice $x\in R$ notăm cu $[x]$ partea întreagă a lui x. Notăm $\{x\}=x-[x]$, $x\in R$ partea fracţionară a numărului x. Considerăm funcţiile $f(x)=[x]$, $x\in R$; $g(x)=\{x\}$, $x\in R$, $h(x)=\dfrac{\{x\}^2}{[x]}$, $x\in[1,\infty)$.

(3p) **1)** Să se calculeze: $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$, $g\left(\dfrac{1}{2}\right)$, $f(\pi)$, $f(\sqrt{10})$, $h(1)$, $h(2)$.

2) Să se arate că:

(2p) **a)** $f(x+y)\geq f(x)+f(y)$, $(\forall)\ x,y\in R$

(2p) **b)** $g(x+y)\leq g(x)+g(y)$, $(\forall)\ x,y\in R$

(2p) **c)** $h(x+y)\leq h(x)+h(y)$, $(\forall)\ x,y\in[1,\infty)$.

Iuliana Turcu

IV. *(9p)* Să se demonstreze că dacă $x,y,z\in R$, atunci este adevărată următoarea inegalitate:

$$|\cos x|+|\cos y|+|\cos z|+|\cos(x+y)|+|\cos(y+z)|+|\cos(x+z)|+3|\cos(x+y+z)|\geq 3$$

Sorin Rădulescu, Marius Rădulescu

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se notează de la 1 p din oficiu la 10p. Timp de lucru 3 ore.