



Concursul Național de Matematică "Arhimede"  
Ediția a VIII-a, Etapa finală 9 aprilie 2011  
Clasa a IX-a

I. Fie  $a = \sqrt{8} - \sqrt{5}$  și  $b = \sqrt{7} - \sqrt{6}$ . Considerăm șirul  $x_n = a^n + b^n$ ,  $n \geq 1$ .

(3p) 1) Să se calculeze  $a^2 - b^2$ .

(3p) 2) Să se precizeze care dintre numerele  $a$  și  $b$  este mai mare.

(3p) 3) Să se arate că șirul  $(x_n)_{n \geq 1}$  este descrescător.

II. Fie  $ABC$  un triunghi dreptunghic cu unghiul drept în  $A$ . Să notăm cu  $a, b, c$  lungimile laturilor triunghiului și să presupunem că  $c \leq b < a$ .

Să notăm  $x = \sin B + \sin C$  și  $y = \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C$ .

(4p) 1) Dacă  $c, b$  și  $a$  sunt în progresie aritmetică să se calculeze  $x$  și  $y$ .

(5p) 2) Dacă  $c, b$  și  $a$  sunt în progresie geometrică, să se calculeze  $x$  și  $y$ . Să se arate că  $x$  și  $y$ , astfel determinați, sunt numere iraționale.

Georgeta Alexandrescu

III. Pentru orice  $x \in \mathbb{R}$  notăm cu  $[x]$  partea întreagă a lui  $x$ . Notăm  $\{x\} = x - [x]$ ,  $x \in \mathbb{R}$  partea fracționară a

numărului  $x$ . Considerăm funcțiile  $f(x) = [x]$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ;  $g(x) = \{x\}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $h(x) = \frac{\{x\}^2}{[x]}$ ,  $x \in [1, \infty)$ .

(3p) 1) Să se calculeze:  $f\left(\frac{1}{2}\right)$ ,  $g\left(\frac{1}{2}\right)$ ,  $f(\pi)$ ,  $f(\sqrt{10})$ ,  $h(1)$ ,  $h(2)$ .

2) Să se arate că:

(2p) a)  $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$ ,  $(\forall) x, y \in \mathbb{R}$

(2p) b)  $g(x+y) \leq g(x) + g(y)$ ,  $(\forall) x, y \in \mathbb{R}$

(2p) c)  $h(x+y) \leq h(x) + h(y)$ ,  $(\forall) x, y \in [1, \infty)$ .

Iuliana Turcu

IV. (9p) Să se demonstreze că dacă  $x, y, z \in \mathbb{R}$ , atunci este adevărată următoarea inegalitate:

$$|\cos x| + |\cos y| + |\cos z| + |\cos(x+y)| + |\cos(y+z)| + |\cos(x+z)| + 3|\cos(x+y+z)| \geq 3$$

Sorin Rădulescu, Marius Rădulescu

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se notează de la 1 p din oficiu la 10p. Timp de lucru 3 ore.