



Luni, 18 iulie, 2011

Problema 1. Pentru orice mulțime formată din patru numere naturale nenule distincte $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ notăm cu s_A suma $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$. Fie n_A numărul de perechi (i, j) cu $1 \leq i < j \leq 4$, pentru care $a_i + a_j$ divide s_A . Determinați mulțimile A pentru care n_A ia valoarea maximă.

Problema 2. Fie \mathcal{S} o mulțime finită de puncte din plan ce conține cel puțin două puncte, astfel încât oricare trei puncte nu sunt coliniare. Prin *moară de vânt* definim următorul proces. Considerăm o dreaptă ℓ ce trece printr-un singur punct $P \in \mathcal{S}$. Dreapta ℓ se rotește în sensul acelor de ceasornic în jurul punctului *pivot* P până întâlnește pentru prima dată un alt punct Q aparținând mulțimii \mathcal{S} . Punctul Q devine noul pivot în jurul căruia dreapta ℓ continuă să se rotească în sens orar, până va întâlni din nou pentru prima dată un punct din mulțimea \mathcal{S} . Procesul continuă indefinit, pivotul fiind de fiecare dată un punct din \mathcal{S} .

Demonstrați că există un punct $P \in \mathcal{S}$ și o dreaptă inițială ℓ ce conține P , astfel încât moara de vânt să treacă de o infinitate de ori prin fiecare punct din \mathcal{S} .

Problema 3. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea

$$f(x + y) \leq yf(x) + f(f(x))$$

pentru orice numere reale x și y . Demonstrați că $f(x) = 0$ pentru orice număr $x \leq 0$.

Language: Romanian

Timp de lucru: 4 ore și 30 de minute
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte

Marți, 19 iulie, 2011

Problema 4. Fie n un număr natural strict pozitiv. Considerăm o balanță cu două talere și n greutateți având valorile $2^0, 2^1, \dots, 2^{n-1}$, respectiv. Cele n greutateți sunt puse pe rând pe unul dintre talerele balanței, într-o secvență de n mutări. Prima mutare constă în alegerea unei greutateți și plasarea ei pe talerul stâng. Fiecare dintre următoarele mutări constă în plasarea uneia dintre greutatețile rămase pe unul dintre talere în așa fel încât în fiecare moment talerul din dreapta nu este mai greu decât talerul din stânga. Determinați numărul de astfel de secvențe de n mutări.

Problema 5. Considerăm o funcție $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}^*$, astfel încât pentru orice întregi m și n , diferența $f(m) - f(n)$ se divide prin $f(m - n)$. Demonstrați că, pentru orice întregi m, n pentru care $f(m) \leq f(n)$, numărul $f(n)$ se divide prin $f(m)$.

Problema 6. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic și Γ cercul său circumscris. Considerăm o dreaptă ℓ tangentă la Γ . Fie ℓ_a, ℓ_b , respectiv ℓ_c simetricile lui ℓ față de dreptele BC, CA , respectiv AB . Arătați că cercul circumscris triunghiului determinat de dreptele ℓ_a, ℓ_b , și ℓ_c este tangent cercului Γ .

Language: Romanian

Timp de lucru: 4 ore și 30 de minute
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte