Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa finală, Oradea, 18 aprilie 2011

CLASA a XII-a – BAREMURI

Problema 1. Fie m un număr natural nenul, p un număr prim şi A un inel care are exact m elemente inversabile, iar $\underbrace{1+1+\cdots+1}_{p \text{ ori}}=0$. Să se arate că inelul A are elemente nilpotente nenule dacă şi numai dacă p divide m.

Soluţie. Fie $a \in A$, $a \neq 0$, un element nilpotent şi $k \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $a^{p^k}=0$. Întrucât $(a+1)^{p^k}=a^{p^k}+1=1$, rezultă că $a+1$ este inversabil şi ordinul lui $a+1$ în grupul multiplicativ $U(A)$ al unităţilor lui A este o putere a lui p. Deoarece ordinul lui $a+1$ divide ordinul m al lui $U(A)$, rezultă că p divide m. .... **3 puncte**

Reciproc, conform teoremei lui Cauchy, există un element a de ordin p în $U(A)$. Întrucât $(a-1)^p=a^p-1=0$ şi $a \neq 1$, rezultă că $a-1$ este un element nilpotent nenul. .... **4 puncte**

Problema 2. Fie $f:[0,1]\to(0,\infty)$ o funcţie continuă. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, se consideră diviziunea $0=t_0<t_1<\cdots<t_n=1$, astfel încât
$$\int_{t_0}^{t_1} f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,\mathrm{d}t=\cdots=\int_{t_{n-1}}^{t_n} f(t)\,\mathrm{d}t.$$
Să se calculeze
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\dfrac{1}{f(t_1)}+\dfrac{1}{f(t_2)}+\cdots+\dfrac{1}{f(t_n)}}.$$

Soluţia 1. Fie $F:[0,1]\to[0,I]$,
$$F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t,\quad \text{unde}\quad I=\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$
Deoarece f ia valori strict pozitive, rezultă că F este strict crescătoare, deci injectivă. Întrucât F este continuă, $F(0)=0$ şi $F(1)=I$, rezultă că F este surjectivă şi $F^{-1}(kI/n)=t_k$, $k=0,1,\cdots,n$, $n\geq 2$. .... **2 puncte**

Dacă notăm cu $(x_n)_{n\geq 2}$ şirul din enunţ, atunci
$$\begin{aligned}\frac{1}{x_n}&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{f(t_k)}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{f(F^{-1}(kI/n))}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{F'(F^{-1}(kI/n))}\\&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(F^{-1})'(kI/n).\end{aligned}$$
.... **3 puncte**

Întrucât $(F^{-1})'$ este continuă, rezultă că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \int_0^1 (F^{-1})'(Ix)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{I}F^{-1}(Ix)\Big|_0^1 = \frac{1}{I}.$$

.... **2 puncte**

Soluţia 2. Fie $\mu = \min\{f(t) : 0 \le t \le 1\} > 0$ şi

$$I = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t > 0.$$

Aplicând teorema mediei pe fiecare interval $[t_{k-1}, t_k]$, obţinem

$$I/n = \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(t)\,\mathrm{d}t = (t_k - t_{k-1})f(\theta_k), \quad t_{k-1} < \theta_k < t_k,$$

deci

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{f(t_k)} = \frac{1}{I}\sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1})\frac{f(\theta_k)}{f(t_k)}.$$

.... **1 punct**

Fie $\varepsilon > 0$ şi n suficient de mare: $I/n < \varepsilon$. Întrucât f este continuă, iar $[0,1]$ este compact, f este uniform continuă pe acest interval: există $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, astfel încât $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$, dacă $|x - x'| < \delta$. Dacă n este suficient de mare, atunci

$$0 < t_k - \theta_k < t_k - t_{k-1} = \frac{I}{nf(\theta_k)} \le \frac{I}{n\mu} < \delta, \quad k = 1, 2, \cdots, n,$$

deci $|f(t_k) - f(\theta_k)| < \varepsilon$, de unde

$$\left|\frac{f(\theta_k)}{f(t_k)} - 1\right| < \frac{\varepsilon}{f(t_k)} \le \frac{\varepsilon}{\mu}, \quad k = 1, 2, \cdots, n.$$

Prin urmare,

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{I}\sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1})\frac{f(\theta_k)}{f(t_k)} - \frac{1}{I}\right| &= \left|\frac{1}{I}\sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1})\left(\frac{f(\theta_k)}{f(t_k)} - 1\right)\right| \\ &\le \frac{1}{I}\sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1})\left|\frac{f(\theta_k)}{f(t_k)} - 1\right| < \frac{\varepsilon}{I\mu},\end{aligned}$$

i. e., şirul din enunţul problemei este convergent la I. .... **6 puncte**

Problema 3. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$, şi A un inel cu n elemente, astfel încât ecuaţia $x^{n+1} + x = 0$ să aibă în $A \setminus \{0\}$ soluţia unică $x = 1$. Să se arate că A este corp.

Soluţie. Întrucât 1 verifică ecuaţia $x^{n+1}+x=0$, rezultă că $1+1=0$, deci toate elementele nenule ale grupului aditiv $(A,+)$ au ordinul 2. Teorema lui Cauchy implică deci că $n=2^m$, $m\in\mathbb{N}^*$. .... **1 punct**

Fie $a\in A$, $a\neq 0$. Întrucât inelul A este finit, există $p<q$, astfel încât $a^p=a^q$. Prin înmulţiri succesive cu a^{q-p}, rezultă că $a^q=a^{(k+1)q-kp}$, $k\geq 1$. Alegem $k\in\mathbb{N}^*$, astfel încât $r=(k+1)q-kp>2q$. Prin înmulţire cu a^{r-2q}, obţinem $a^{r-q}=a^{2(r-q)}$. Fie $b=a^{r-q}$. Întrucât $b^2=b$, rezultă că $b^{n+1}=b$, deci $b^{n+1}+b=0$, de unde $b\in\{0,1\}$. .... **4 puncte**

Dacă $b=a^{r-q}=0$, alegem $s\in\mathbb{N}$, $s\geq 2$, astfel încât $a^{s-1}\neq 0$ şi $a^s=0$. Fie $c=a^{s-1}$. Atunci $c^2=0$ şi în consecinţă $(c+1)^{n+1}=(c+1)^{2^m}(c+1)=(c^{2^m}+1)(c+1)=c+1$. Conform ipotezei, rezultă că $c+1\in\{0,1\}$ — contradicţie. Deci $a^{r-q}=1$, i. e., a este inversabil. .... **2 puncte**

Problema 4. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie crescătoare, $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie care are derivate laterale finite în orice punct din $\mathbb{R}$ şi $F(0)=0$. Ştiind că

$$\lim_{x\uparrow x_0} f(x)\leq F'_s(x_0)\quad \text{şi}\quad \lim_{x\downarrow x_0} f(x)\geq F'_d(x_0),$$

oricare ar fi $x_0\in\mathbb{R}$, să se arate că

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t,\quad x\in\mathbb{R}.$$

Soluţie. Considerăm funcţia $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$G(x)=F(x)-\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Fie $x_0\in\mathbb{R}$, $x\neq x_0$. Atunci

$$F(x)=\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)+F(x_0).$$

Deoarece F are derivate laterale finite în x_0, rezultă că funcţia

$$x\mapsto\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0},\quad x\neq x_0,$$

este mărginită în jurul lui x_0, deci $\lim\limits_{x\to x_0} F(x)=F(x_0)$. Prin urmare, funcţia G este continuă. .... **1 punct**

Arătăm că G are derivate laterale finite în fiecare punct $x_0\in\mathbb{R}$ şi $G'_s(x_0)\geq 0$ şi $G'_d(x_0)\leq 0$. Fie $x>x_0$. Deoarece $\lim_{x\downarrow x_0} f(x)\leq f(t)\leq f(x)$, $x_0<t\leq x$, rezultă că

$$\lim_{x\downarrow x_0} f(x)\leq\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t\leq f(x),$$

deci

$$\lim_{x\downarrow x_0}\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t=\lim_{x\downarrow x_0} f(x).$$

Prin urmare,

$$\lim_{x\downarrow x_0}\frac{G(x)-G(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\downarrow x_0}\left(\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}-\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x}f(t)\,\mathrm{d}t\right)$$
$$=F'_d(x_0)-\lim_{x\downarrow x_0}f(x)\le 0.$$

În mod analog,

$$\lim_{x\uparrow x_0}\frac{G(x)-G(x_0)}{x-x_0}=F'_s(x_0)-\lim_{x\uparrow x_0}f(x)\ge 0.$$

.... **2 puncte**

Aşadar, $0\le G'_s(x)<\infty$ şi $-\infty<G'_d(x)\le 0$, oricare ar fi numărul real x. Rezultă că

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{G(x-\varepsilon)-G(x-\varepsilon/2)}{\varepsilon}=-\frac{1}{2}G'_s(x)\le 0,\quad x\in\mathbb{R},$$

şi

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{G(x+\varepsilon)-G(x+\varepsilon/2)}{\varepsilon}=\frac{1}{2}G'_d(x)\le 0,\quad x\in\mathbb{R}.$$

Arătăm că G este constantă. Să presupunem că există $a<b$, astfel încât $G(a)\ne G(b)$.

Dacă $G(a)<G(b)$, considerăm un număr real strict negativ $\lambda>(G(a)-G(b))/(b-a)$. Funcţia $H:[a,b]\to\mathbb{R}$, $H(x)=G(x)+\lambda x$, este continuă, $H(a)<H(b)$ şi

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{H(x+\varepsilon)-H(x+\varepsilon/2)}{\varepsilon}=\frac{1}{2}G'_d(x)+\frac{\lambda}{2}\le\frac{\lambda}{2}<0,\quad x\in\mathbb{R}.$$

Deci, oricare ar fi numărul real x, există $\delta(x)>0$, astfel încât $H(x+\varepsilon)<H(x+\varepsilon/2)$, $0<\varepsilon<\delta(x)$. Fie $c\in[a,b]$, astfel încât

$$H(c)=\min\{H(x):a\le x\le b\}.$$

Întrucât $H(a)<H(b)$, rezultă că $a\le c<b$. Fixăm un număr real strict pozitiv $\varepsilon<\min(b-c,\delta(c))$. Atunci

$$H(c)\le H(c+\varepsilon)<H(c+\varepsilon/2)<\cdots<H(c+\varepsilon/2^n)<\cdots\le H(c),$$

ultima inegalitate rezultând din continuitatea lui H — contradicţie.

Dacă $G(a)>G(b)$, procedăm în mod analog: considerăm un număr real strict pozitiv $\lambda<(G(a)-G(b))/(b-a)$. În acest caz, funcţia continuă corespunzătoare, $H(x)=G(x)+\lambda x$, îndeplineşte condiţiile $H(a)>H(b)$ şi

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{H(x-\varepsilon)-H(x-\varepsilon/2)}{\varepsilon}=-\frac{1}{2}G'_s(x)-\frac{\lambda}{2}\le-\frac{\lambda}{2}<0,\quad x\in\mathbb{R}.$$

Deci, oricare ar fi numărul real x, există $\delta(x) > 0$, astfel încât $H(x-\varepsilon) < H(x-\varepsilon/2)$, $0 < \varepsilon < \delta(x)$. Fie $c \in [a,b]$, astfel încât

$$H(c) = \min\{H(x) : a \le x \le b\}.$$

Întrucât $H(a) > H(b)$, rezultă că $a < c \le b$. Fixăm un număr real strict pozitiv $\varepsilon < \min(c-a, \delta(c))$. Atunci

$$H(c) \le H(c-\varepsilon) < H(c-\varepsilon/2) < \cdots < H(c-\varepsilon/2^n) < \cdots \le H(c),$$

ultima inegalitate rezultând din continuitatea lui H — contradicţie.

În consecinţă, G este constantă. Întrucât $G(0) = 0$, rezultă că $G(x) = 0$, oricare ar fi x real. .... **4 puncte**