Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa finală, Oradea, 18 aprilie 2011

CLASA a IX-a – BAREMURI

Problema 1. Fie n un număr natural nenul şi fie numerele reale $a_1, a_2, \ldots, a_n$ astfel încât $a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n \geq m + (m+1) + \cdots + n$, oricare ar fi $m = 1, 2, \ldots, n$. Să se arate că $a_1^2 + \cdots + a_n^2 \geq \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Soluţie. Notăm $b_k = a_k - k, \forall k = 1, 2, \ldots, n$. Avem

$$b_m + b_{m+1} + \cdots + b_n \geq 0, \text{ pentru orice } m = 1, 2, \ldots, n.$$

.... **2 puncte**

Rezultă că

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \sum_{i=1}^{n} b_i^2 + \sum_{i=1}^{n} 2ib_i + \sum_{i=1}^{n} i^2 \geq$$

.... **2 puncte**

$$\geq \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

.... **1 punct**

deoarece

$$\sum_{i=1}^{n} ib_i = (b_1 + \cdots + b_n) + (b_2 + \cdots + b_n) + \cdots + b_n \geq 0.$$

.... **2 puncte**

Problema 2. Fie n un număr natural nenul. Să se arate că orice număr natural nenul, mai mic sau egal cu $n!$, este suma a cel mult n divizori distincţi ai numărului $n!$.

Soluţie. Demonstrăm prin inducţie după n. Cazul $n = 1$ este evident. Presupunând că afirmaţia este adevărată pentru n, fie $m \leq (n+1)!$.

Există $q, r \in \mathbb{N}$ cu $m = (n+1)q + r$, $0 \leq r \leq n$.

.... **2 puncte**

Rezultă că $q \leq n!$.

.... **1 punct**

Din inducţie, q se scrie ca suma a (cel mult) n divizori ai lui $n!$ – fie aceştia $d_1, \ldots, d_k$, $k \leq n$.

.... **1 punct**

Atunci $(n+1)q$ se scrie $(n+1)d_1 + (n+1)d_2 + \cdots + (n+1)d_k$, unde $(n+1)d_i$ este un divizor al lui $(n+1)!$.

.... **1 punct**

Dacă $r = 0$, problema este rezolvată;

.... **1 punct** dacă $r > 0$, cum r divide $(n+1)!$ şi $r < n+1 \leq (n+1)d_i$, rezultă că m se scrie ca suma a $k+1$ divizori distincţi ai lui $(n+1)!$, unde $k+1 \leq n+1$, ceea ce trebuia demonstrat.

.... **1 punct**

Problema 3.

Fie ABC un triunghi şi fie I_a centrul cercului exînscris corespunzător lui A. Fie P şi Q punctele de tangenţă a cercului exînscris cu dreptele AB şi AC. Dreapta PQ intersectează dreptele I_aB şi I_aC în punctele D, respectiv E. Notăm cu A_1 punctul de intersecţie a dreptelor DC şi BE şi definim analog punctele B_1 şi C_1. Să se arate că AA_1, BB_1, CC_1 sunt concurente.

Soluţie. Vom arăta că A_1 este ortocentrul triunghiului I_aBC.

Pentru aceasta, vom demonstra că $\angle PEI_a = \angle PBI_a$. Într-adevăr, $\angle PEI_a = 180° - \angle PQA - \angle ECQ = 180° - (90° - \frac{1}{2}A) - (90° - \frac{1}{2}C) = \frac{1}{2}(A+C) = 90° - \frac{1}{2}B = \angle PBI_a$.

.... **2 puncte**

Rezultă că BEI_aP este patrulater inscriptibil, şi cum $\angle BPI_a = 90°$, avem $BE \perp CI_a$.

.... **2 puncte**

Deducem că $BA_1 \parallel CI$, unde I este centrul cercului înscris în triunghiul ABC. Raţionând analog rezultă că $BICA_1$ este paralelogram.

.... **1 punct**

Analog $AIBC_1$ este paralelogram, deci şi AC_1A_1C este paralelogram, adică segmentele AA_1 şi CC_1 se înjumătăţesc. Similar, segmentul BB_1 are acelaşi mijloc cu AA_1 şi CC_1, de unde rezultă cerinţa.

.... **2 puncte**

Problema 4. Fie n un număr natural nenul. Să se demonstreze că cel puţin unul dintre numerele $\left[2^n\sqrt{2}\right], \left[2^{n+1}\sqrt{2}\right], \ldots, \left[2^{2n}\sqrt{2}\right]$ este par.

($[a]$ înseamnă partea întreagă a numărului real a.)

Soluţie. Să presupunem prin absurd că toate numerele sunt impare. Atunci există $a \in \mathbb{N}^*$ cu proprietatea că

$$2a - 1 < 2^n\sqrt{2} < 2a.$$

Înmulţind cu 2 obţinem $4a - 2 < 2^{n+1}\sqrt{2} < 4a$; cum $\left[2^{n+1}\sqrt{2}\right]$ este număr impar, deducem că $4a - 1 < 2^{n+1}\sqrt{2} < 4a$.

.... **1 punct**

Continuând analog, rezultă că $2^{n+1}a - 1 < 2^{2n}\sqrt{2} < 2^{n+1}a$,

.... **1 punct**

de unde $a - 2^{n-1}\sqrt{2} < \dfrac{1}{2^{n+1}}$.

.... **1 punct**

De aici rezultă $\dfrac{a^2 - 2^{2n-1}}{a + 2^{n-1}\sqrt{2}} < \dfrac{1}{2^{n+1}}$.

.... **1 punct**

Pe de altă parte, din $2a > 2^n\sqrt{2}$ rezultă $a^2 > 2^{2n-1}$, ceea ce implică $a^2 - 2^{2n-1} \geq 1$.

.... **1 punct**

Rezultă că $\dfrac{1}{a + 2^{n-1}\sqrt{2}} < \dfrac{1}{2^{n+1}}$, deci

$$\begin{aligned} 2^{n+1} < 2^{n-1}\sqrt{2} + a < 2^{n-1}\sqrt{2} + \frac{2^n\sqrt{2}+1}{2} \Rightarrow \\ 2^{n+2} < 2^{n+1}\sqrt{2} + 1 \Rightarrow \\ 2 < \sqrt{2} + \frac{1}{2^{n+1}} < \frac{3}{2} + \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

contradicţie.

.... **2 puncte**