CLASA a VI-a, SOLUŢII şi BAREM DE CORECTARE

Problema 1. Pe o tablă sunt desenate punctele coliniare A, O şi C, în această ordine. Anghel şi Costel trasează, pe rând, semidreptele $[OA_1$ şi $[OC_1$, în sensul deplasării acelor de ceasornic, astfel încât $m(\angle AOA_1) = 3°$ şi $m(\angle COC_1) = 7°$. La pasul următor, păstrând sensul, Anghel trasează semidreapta $[OA_2$ astfel încât $m(\angle A_1OA_2) = 3°$ şi Costel trasează semidreapta $[OC_2$ astfel încât $m(\angle C_1OC_2) = 7°$. Construcţia continuă după aceeaşi regulă (unghi de $3°$, urmat de unghi de $7°$) până la pasul final, fie acesta n, când semidreapta $[OC_n$ coincide cu semidreapta $[OA_n$.

a) Determinaţi n.

b) De câte ori, pe parcursul construcţiei, o semidreaptă trasată de Costel s-a suprapus peste o semidreaptă trasată anterior de Anghel?

Soluţie. a) Costel are de recuperat $180°$. .... **1 punct**

După fiecare pas el recuperează $7° - 3° = 4°$. .... **1 punct**

Sunt necesari $180 : 4 = 45$ paşi. .... **2 puncte**

b) Dacă două semidrepte trasate de Anghel şi Costel coincid, atunci Anghel a trasat x semidrepte iar Costel y semidrepte şi avem egalitatea $7y = 3x + 180$. .... **1 punct**

Deducem că y se divide cu 3 şi $y \in \{26, 27, \ldots, 45\}$. Obţinem

$$(x, y) \in \{(3, 27); (10, 30); (17, 33); (24, 36); (31, 39); (38, 42); (45, 45)\},$$

adică 7 coincidenţe .... **2 puncte**

Problema 2. Vom numi *superprim* un număr natural prim, mai mare decât 10, care îndeplineşte simultan următoarele condiţii:

i) este format din cifre distincte;

ii) oricum am schimba ordinea cifrelor sale, obţinem tot un număr prim.

Determinaţi toate numerele superprime.

Soluţie. Numerele superprime sunt formate doar din cifrele 1, 3, 7, 9, deoarece, în caz contrar, prin schimbarea ordinii cifrelor se poate obţine un număr par sau un număr divizibil cu 5. Prin urmare, un număr superprim poate avea cel mult 4 cifre. .... **2 puncte**

Cum 1397 se divide cu 11, nu există numere superprime formate cu 4 cifre........... **2 puncte**

Cum $7 \mid 371, 11 \mid 319, 7 \mid 791, 13 \mid 793$, nu există numere superprime cu 3 cifre........ **2 puncte**

Numerele superprime de două cifre sunt 13, 31, 17, 71, 37, 73, 79, 97. .... **1 punct**

Problema 3. Fie ABC un triunghi echilateral. În semiplanul determinat de BC care nu-l conţine pe A considerăm un punct D astfel încât $m(\angle BDC) = 90°$. Dacă M este mijlocul segmentului AB, determinaţi $m(\angle BDM)$.

Soluţie. Considerăm punctul N, mijlocul segmentului $[BC]$ .... **1 punct**

Cum DN este mediană în triunghiul BCD, rezultă că triunghiul DNC este isoscel....... **1 punct**

Fie $m(\angle BCD) = \alpha$. Unghiul $\angle BND$ este exterior ΔDNC, deci $m(\angle BND) = 2\alpha$........ **1 punct**

Deoarece triunghiul BMN este echilateral rezultă că $MN = BN$. Cum $DN = BN$ rezultă că triunghiul MND este isoscel .... **2 puncte**

Reiese $m(\angle DMN) = 60° - \alpha$ şi $m(\angle BMD) = \alpha$ şi, din ΔMBD, $m(\angle BDM) = 30°$.... **2 puncte**

Problema 4. Vom numi un număr natural n *interesant* dacă $n \geq 2$ şi orice număr $k \in \mathbb{N}^*$, $k < n$, se scrie ca o sumă de divizori distincţi ai lui n.

Arătaţi că produsul a două numere interesante este un număr interesant.

(*Se acceptă că o sumă poate avea un singur termen.*)

Soluţie. Dacă m, n sunt interesante şi $an < x < an + n$, atunci $x = an + c_1 + c_2 + \ldots + c_k$, unde $c_1, c_2, \ldots, c_k$ sunt divizori distincţi ai lui n .... **2 puncte**

Pe de altă parte, dacă $1 \leq x < mn$, atunci, din teorema împărţirii cu rest, $x = an + b$, cu $0 \leq b < n, 0 \leq a < m$ .... **2 puncte**

Cum m este interesant, putem scrie, pentru $a \geq 1$, $a = d_1 + \ldots + d_\ell$, cu $d_1, \ldots, d_\ell$ divizori distincţi ai lui m .... **2 puncte**

Prin urmare $x = nd_1 + nd_2 + \cdots + nd_\ell + c_1 + c_2 + \cdots + c_k$ (folosind doar divizori de tip c_i pentru $a = 0$, respetiv d_j pentru $b = 0$). Cum pentru fiecare d_j şi c_i avem $c_i < n \leq nd_j$ rezultă că toţi divizorii $nd_1, nd_2, \ldots, nd_\ell$, $c_1, c_2, \ldots, c_k$ ai numărului mn sunt distincţi .... **1 punct**