

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică- informatică.

- ♦ Toate subiectele (I,II,III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- ♦ Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
- ♦ La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Să se calculeze $\log_4(7 - \sqrt{5}) + \log_4(7 + \sqrt{5}) - \log_4 11$.
- 5p 2. Să se determine imaginea funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -3 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 5$.
- 5p 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{-3x + 5} = 2$.
- 5p 4. Să se determine probabilitatea ca alegând un număr \overline{ab} din mulțimea numerelor naturale de două cifre, să avem $a + b = 7$.
- 5p 5. Să se determine ecuația perpendicularei duse din punctul $A(-3,1)$ pe dreapta $d: 2x - 3y + 1 = 0$.
- 5p 6. Știind că $\cos x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, să se calculeze $\cos 2x$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ și $C_t = \frac{1}{3 \cdot t^2} \cdot A + \frac{t}{3} \cdot B$, $t \in \mathbb{R}^*$.

- 5p a) Să se calculeze $B \cdot A$.
- 5p b) Să se demonstreze că $C_x \cdot C_y = C_{x \cdot y}$, $(\forall) x, y \in \mathbb{R}^*$.
- 5p c) Să se demonstreze că, pentru $(\forall) t \in \mathbb{R}^*$, $\det(C_t) \neq 0$.
2. Pe mulțimea $G = [0, \infty)$ se definește operația $x * y = \ln(e^x + e^y - 1)$, $(\forall) x, y \in G$.
- 5p a) Să se demonstreze că dacă $x, y \in G$, atunci $x * y \in G$.
- 5p b) Să se demonstreze că legea de compoziție "*" este asociativă.
- 5p c) Pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, să se determine $x \in G$ astfel încât $\underbrace{x * x * x * \dots * x}_{\text{de } n \text{ ori } x} = 2x$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln(x^2 + 1)$, unde $a > 0$, $a \neq 1$.

- 5p a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Să se determine valorile reale ale lui a , pentru care funcția f este convexă pe $(-1,1)$.
- 5p c) Utilizând teorema lui Lagrange, să se demonstreze că există $c \in \left(\frac{1}{e}, e\right)$, astfel încât $\frac{c}{c^2 + 1} = \frac{e}{e^2 - 1}$.
2. Se consideră șirul $(I_n)_{n \geq 0}$ având termenul general $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2 + x + 1} dx$.
- 5p a) Să se calculeze I_0 și I_1 .
- 5p b) Să se demonstreze că șirul $(I_n)_{n \geq 0}$ este convergent.
- 5p c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$.