



26 martie 2011

” Micii matematicieni ”
ediția a VI a

concurs pentru elevii claselor a III a – a VIII a



26 martie 2011

“ Micii matematicieni ”
ediția a VI a

concurs pentru elevii claselor a III a – a VIII a

Clasa a VIII - a

Subiectul I (30 puncte) :

1. Fie expresia algebrică:

$$E(x) = \left[\left(\frac{x-1}{x+1} \right)^2 + 1 + \frac{2x-2}{x+1} \right] \cdot \frac{(x+1)(x^2 - x + 1) + 3x + 3x^2}{16x^2} .$$

- Aduceți la forma cea mai simplă expresia în condițiile de existență determinate în prealabil.
- Pentru ce valori ale lui $x \in \mathbb{N}$, partea întreagă a numărului $\sqrt{E(x)}$ este inversul numărului $E(x)$?

2. a) Demonstrați că pentru orice $x \in [0; 2012)$ are loc inegalitatea: $\sqrt{\frac{x}{2012-x}} \geq \frac{x}{1006}$.

b) Arătați că are loc inegalitatea: $\sqrt{\frac{1}{2011}} + \sqrt{\frac{2}{2010}} + \sqrt{\frac{3}{2009}} + \dots + \sqrt{\frac{2011}{1}} > 2011$.

Subiectul II (15 puncte) :

Trei elevi au scris fiecare câte 60 de cuvinte. Analizând listele, s-au șters cuvintele care s-au găsit cel puțin de două ori. După această operație s-a constatat că un elev a rămas pe listă cu 40 de cuvinte, altul cu 48, iar ultimul mai are pe listă 43. Să se demonstreze că cel puțin un cuvânt a fost scris de toți trei.

Subiectul III (15 puncte) :

Să se arate că tetraedrul care are lungimile muchiilor laterale egale cu $\sqrt{3}$ și care fac între ele unghiuri de 60° , 90° , respectiv 120° au două înălțimi egale.



26 martie 2011

Micii matematicieni[™]
ediția a VI a

concurs pentru elevii claselor a III a – a VIII a

BAREM - Clasa a VIII - a

Subiectul I (30 puncte) :

1. a)

$$\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 + 1 + 2\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \left(\frac{x-1}{x+1} + 1\right)^2$$

$$\left(\frac{x-1}{x+1} + 1\right)^2 = \left(\frac{x-1+x+1}{x+1}\right)^2 = \left(\frac{2x}{x+1}\right)^2$$

..... 4p

$$\frac{(x+1)(x^2-x+1) + 3x + 3x^2}{16x^2} = \frac{(x+1)(x^2-x+1+3x)}{16x^2}$$
$$= \frac{(x+1)(x+1)^2}{16x}$$

..... 4p

$$E(x) = \left(\frac{2x}{x+1}\right)^2 \cdot \frac{(x+1)^3}{16x^2} = \frac{4x^2}{(x+1)^2} \cdot \frac{(x+1)^3}{16x^2} = \frac{x+1}{4}$$

..... 2p

Existența $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$ 1p

b)

$\frac{1}{E(x)} \in \mathbb{Z}$ 1p

$\frac{1}{E(x)} = \frac{4}{x+1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \left. \begin{matrix} x+1 \in D_4 \\ x \in \mathbb{N} \end{matrix} \right\} \Rightarrow x \in \{0, 1, 3\}$ 2p

$$\left. \begin{matrix} \left[\sqrt{E(0)} \right] = \left[\sqrt{\frac{1}{4}} \right] = \left[\frac{1}{2} \right] = 0 \\ \frac{1}{E(0)} = 4 \end{matrix} \right\} \text{fals}$$



26 martie 2011

“ Micii matematicieni ”
ediția a VI a

concurs pentru elevii claselor a III a – a VIII a

$$\left. \begin{aligned} [\sqrt{E(1)}] &= \left[\sqrt{\frac{1}{2}} \right] = 0 \\ \frac{1}{E(1)} &= 2 \end{aligned} \right\} \text{fals}$$

$$\left. \begin{aligned} [E(3) = [1] = 1] \\ \frac{1}{E(3)} = 1 \end{aligned} \right\} \text{adevărat} \Rightarrow x = 3$$

..... 2p

2) a)

$$\sqrt{\frac{x}{2012-x}} \geq \frac{x}{1006} \Rightarrow \frac{x}{2012-x} \geq \frac{x^2}{1006^2}$$

$$\frac{x}{2012-x} \geq \frac{x^2}{1006^2} \Rightarrow \frac{1}{2012-x} \geq \frac{x}{1006^2}$$

..... 3p

$$\frac{1}{2012-x} \geq \frac{x}{1006^2} \Rightarrow 1006^2 \geq 2012x - x^2$$

..... 2p

$$x^2 - 2012x + 1006^2 \geq 0$$

$$(x - 1006)^2 \geq 0 \text{ adevărat}$$

..... 2p

b)

$$\sqrt{\frac{1}{2011}} + \sqrt{\frac{2}{2010}} + \dots + \sqrt{\frac{2011}{1}} \geq \frac{1+2+\dots+2011}{1006} =$$

..... 4p

$$= \frac{2012 \cdot 2011}{1006 \cdot 2} = 2011$$

..... 3p

Subiectul II (15 puncte) :

A, B, C – elevi

a – nr. de cuvinte comune șterse de pe listele A și B

b – nr. de cuvinte comune șterse de pe listele A și C



26 martie 2011

“ Micii matematicieni ”
ediția a VI a

concurs pentru elevii claselor a III a – a VIII a

c – nr. de cuvinte comune șterse de pe listele B și C
 p – nr. de cuvinte comune șterse de pe listele A, B, C

.....2p

Avem :

$$a + b + p = 60 - 40 = 20$$

$$a + c + p = 60 - 48 = 12$$

$$b + c + p = 60 - 43 = 17$$

..... 3p

Presupunem prin R.A. că $p = 0$. Atunci :

$$\left. \begin{array}{l} a + b = 20 \\ a + c = 12 \\ b + c = 17 \end{array} \right\} \Rightarrow 2a + 17 = 32 \Rightarrow 2a = 15 \Rightarrow a = \frac{15}{2} \notin \mathbb{N}.$$

Deci $p \neq 0$.

..... 10p

Subiectul III (15 puncte) :

$$V = \frac{A_b \cdot h}{3}$$

$$V_{VABC} = \frac{A_{\Delta VAB} \cdot h_c}{3} = \frac{A_{\Delta VBC} \cdot h_c}{3} = \frac{A_{\Delta VAC} \cdot h_b}{3}$$

..... 2p

$$A_{\Delta VAB} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} \dots\dots\dots 3p$$

$$A_{\Delta VBC} = \frac{\sqrt{3}^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \dots\dots\dots 3p$$

Ducem $AM \perp CV, M \in CV$

$$\text{În } \Delta VAM, m(\sphericalangle AVM) = 60^\circ \Rightarrow \sin 60^\circ = \frac{VM}{VA} \Rightarrow VM = \frac{3}{2} \dots\dots\dots 3p$$

$$A_{\Delta VAC} = \frac{\sqrt{3} \cdot \frac{3}{2}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \dots\dots\dots 3p$$

$$A_{\Delta VBC} = A_{\Delta VAC} \Rightarrow h_a = h_b. \dots\dots\dots 1p$$