" Micii matematicieni"
ediţia a VI a

26 martie 2011

concurs pentru elevii claselor a III a – a VIII a

Clasa a VIII - a

Subiectul I (30 puncte) :

1. Fie expresia algebrică:

$$E(x)=\left[\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2+1+\frac{2x-2}{x+1}\right]\cdot\frac{(x+1)(x^2-x+1)+3x+3x^2}{16x^2}\ .$$

a) Aduceţi la forma cea mai simplă expresia în condiţiile de existenţă determinate în prealabil.

b) Pentru ce valori ale lui $x\in N$, partea întreagă a numărului $\sqrt{E(x)}$ este inversul numărului E(x) ?

2. a) Demonstraţi că pentru orice $x\in[0;2012)$ are loc inegalitatea: $\sqrt{\frac{x}{2012-x}}\geq\frac{x}{1006}$.

b) Arătaţi că are loc inegalitatea: $\sqrt{\frac{1}{2011}}+\sqrt{\frac{2}{2010}}+\sqrt{\frac{3}{2009}}+...+\sqrt{\frac{2011}{1}}>2011$.

Subiectul II (15 puncte) :

Trei elevi au scris fiecare câte 60 de cuvinte. Analizând listele, s-au şters cuvintele care s-au găsit cel puţin de două ori. După această operaţie s-a constatat că un elev a rămas pe listă cu 40 de cuvinte, altul cu 48, iar ultimul mai are pe listă 43. Să se demonstreze că cel puţin un cuvânt a fost scris de toţi trei.

Subiectul III (15 puncte) :

Să se arate că tetraedrul care are lungimile muchiilor laterale egale cu $\sqrt{3}$ şi care fac între ele unghiuri de 60^0, 90^0, respectiv 120^0 au două înălţimi egale.

BAREM - Clasa a VIII - a

Subiectul I (30 puncte) :

1. a)

$$\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2+1+2\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=\left(\frac{x-1}{x+1}+1\right)^2$$

$$\left(\frac{x-1}{x+1}+1\right)^2=\left(\frac{x-1+x+1}{x+1}\right)^2=\left(\frac{2x}{x+1}\right)^2$$

.... **4p**

$$\frac{(x+1)(x^2-x+1)+3x+3x^2}{16x^2}=\frac{(x+1)(x^2-x+1+3x)}{16x^2}$$
$$=\frac{(x+1)(x+1)^2}{16x}$$

.... **4p**

$$E(x)=\left(\frac{2x}{x+1}\right)^2\cdot\frac{(x+1)^3}{16x^2}=\frac{4x^2}{(x+1)^2}\cdot\frac{(x+1)^3}{16x^2}=\frac{x+1}{4}$$

.... **2p**

Existența $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,0\}$ **1p**

b)

$\frac{1}{E(x)}\in\mathbb{Z}$...**1p**

$\frac{1}{E(x)}=\frac{4}{x+1}\in\mathbb{Z}\Rightarrow\left.\begin{matrix}x+1\in D_4\\ x\in\mathbb{N}\end{matrix}\right\}\Rightarrow x\in\{0,1,3\}$..................................**2p**

$$\left.\begin{matrix}\left[\sqrt{E(0)}\right]=\left[\sqrt{\frac{1}{4}}\right]=\left[\frac{1}{2}\right]=0\\ \frac{1}{E(0)}=4\end{matrix}\right\}\text{ fals}$$

$$\left.\begin{array}{c}\left[\sqrt{E(1)}\right]=\left[\sqrt{\dfrac{1}{2}}\right]=0\\ \dfrac{1}{E(1)}=2\end{array}\right\}\text{fals}$$

$$\left.\begin{array}{c}[E(3)=[1]=1]\\ \dfrac{1}{E(3)}=1\end{array}\right\}\text{adevărat }\Rightarrow \mathrm{x}=3$$

………… **2p**

2) a)

$$\sqrt{\frac{x}{2012-x}}\geq\frac{x}{1006}\Rightarrow\frac{x}{2012-x}\geq\frac{x^2}{1006^2}$$

$$\frac{x}{2012-x}\geq\frac{x^2}{1006^2}\Rightarrow\frac{1}{2012-x}\geq\frac{x}{1006^2}$$

………… **3p**

$$\frac{1}{2012-x}\geq\frac{x}{1006^2}\Rightarrow 1006^2\geq 2012x-x^2$$

………… **2p**

$$x^2-2012x+1006^2\geq 0$$

$$(x-1006)^2\geq 0\text{ adevărat}$$

………….. **2p**

b)

$$\sqrt{\frac{1}{2011}}+\sqrt{\frac{2}{2010}}+\cdots+\sqrt{\frac{2011}{1}}\geq\frac{1+2+\cdots+2011}{1006}=$$

………….. **4p**

$$=\frac{2012\cdot 2011}{1006\cdot 2}=2011$$

………… **3p**

Subiectul II (15 puncte) :

A, B, C – elevi

a – nr. de cuvinte comune șterse de pe listele A și B

b – nr. de cuvinte comune șterse de pe listele A și C

c – nr. de cuvinte comune şterse de pe listele B şi C
p – nr. de cuvinte comune şterse de pe listele A, B, C

…………………..….**2p**

Avem :

$$a + b + p = 60 - 40 = 20$$
$$a + c + p = 60 - 48 = 12$$
$$b + c + p = 60 - 43 = 17$$

…………………..…. **3p**

Presupunem prin R.A. că p = 0. Atunci :

$$\left.\begin{aligned} a+b&=20\\ a+c&=12\\ b+c&=17 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2a+17=32 \Rightarrow 2a=15 \Rightarrow a=\frac{15}{2}\notin\mathbb{N}.$$

Deci p ≠ 0.

…………………… **10p**

Subiectul III (15 puncte) :

$$V = \frac{A_b \cdot h}{3}$$

$$V_{VABC} = \frac{A_{\Delta VAB}\cdot h_c}{3} = \frac{A_{\Delta VBC}\cdot h_c}{3} = \frac{A_{\Delta VAC}\cdot h_b}{3}$$

……………………….. **2p**

$A_{\Delta VAB} = \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}$ ……………………………………………………..**3p**

$A_{\Delta VBC} = \frac{\sqrt{3}^2\cdot\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ …………………………………………………....**3p**

Ducem $AM \perp CV, M \in CV$

În $\Delta VAM, m(\sphericalangle AVM) = 60° \Rightarrow \sin 60° = \frac{VM}{VA} \Rightarrow VM = \frac{3}{2}$………………**3p**

$A_{\Delta VAC} = \frac{\sqrt{3}\cdot\frac{3}{2}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ ……………………………………………………..**3p**

$A_{\Delta VBC} = A_{\Delta VAC} \Rightarrow h_a = h_b$. ………………………………………….**1p**