Asociațiunea ASTRA – 150 de ani de la înființare (1861-2011)

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ „GHEORGHE LAZĂR”
Ediția a XII-a, 25-27 martie 2011
SIBIU

Clasa a IX-a

1. Fie ABC un triunghi în care $\angle A = 2\angle C$.
Să se arate că $BC^2 - AB^2 = AB \cdot AC$

GM 1/2011, C.O:5103

2. Să se demonstreze că:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(n-k)3^k} \le \frac{1}{3}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$;

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{n+k}{(n-k)3^k} \le \frac{11}{9}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 3$.

Emil C. Popa, Sibiu

3. Fie $(a_n)_{n\ge 1}$ un şir monoton de numere reale. Să se arate că şirul (a_n) este progresie aritmetică dacă şi numai dacă este adevărată egalitatea:

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2}{n} + \frac{n(n^2-1)(a_2-a_1)^2}{12}$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$.

Dumitru Barac, Sibiu

4. Notăm a, b, c lungimile laturilor unui triunghi şi r lungimea razei cercului înscris. Să se arate că

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \le \frac{\sqrt{3}}{4r}.$$

Petru Vlad şi Dumitru Barac, Sibiu

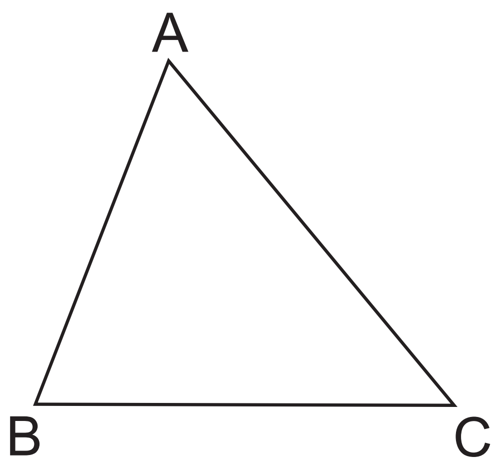
Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru: 3 ore.

CLASA IX-a
BAREM DE CORECTARE

1. Fie ABC un triunghi în care $\angle A = 2\angle C$.
Să se arate că $BC^2 - AB^2 = AB \cdot AC$

GM 1/2011, C.O:5103

Soluţie Figura



Teorema cosinusului dă:

(1) $AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2AC \cdot BC \cos C$ **1p**

Teorema sinusului dă:

$\dfrac{BC}{\sin 2C} = \dfrac{AB}{\sin C}$ **1p**

de unde:

$\cos C = \dfrac{BC}{2AB}$ **1p**

Înlocuind $\cos C$ în (1), obţinem:

$AB^2 = BC^2 + AC^2 - \dfrac{AC \cdot BC^2}{AB}$ **1p**

sau

$$AB^3 - AB \cdot BC^2 - AB \cdot AC^2 + AC \cdot BC^2 = 0$$

sau

$$BC^2(AC - AB) + AB(AB^2 - AC^2) = 0$$

sau

$(AC - AB)(BC^2 - AB \cdot AC - AB^2 - AC^2) = 0$ **2p**

Cum $AC \neq AB$, rezultă

$$BC^2 - AB^2 - AB \cdot AC = 0$$

de unde $BC^2 - AB^2 = AB \cdot AC$, q.e.d. **1p**

Total **7p**

2. Să se demonstreze că:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(n-k)3^k} \le \frac{1}{3}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$;

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{n+k}{(n-k)3^k} \le \frac{11}{9}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 3$.

Emil C. Popa, Sibiu

Soluţie a) Notăm $\sigma_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(n-k)3^k}$.

Avem

$\sigma_2 = \dfrac{1}{3} \le \dfrac{1}{3}$ **1p**

Pentru un $n \ge 2$ presupunem că $\sigma_n \le \dfrac{1}{3}$ este adevărată şi avem:

$$\sigma_{n+1} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{[n-(k-1)]3^{k-1}} = \frac{1}{3}\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(n-i)3^i} =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(n-i)3^i}\right) \le \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{3}\right) < \frac{1}{3}$$ **2p**

b) Notăm $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{n+k}{(n-k)3^k} \le \frac{1}{3}$. Avem $S_3 = \dfrac{11}{9} \le \dfrac{11}{9}$ **1p**

Pentru un $n \ge 3$ presupunem că $S_n \le \dfrac{11}{9}$ este adevărată şi avem:

$$S_{n+1} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} \frac{n+k+1}{[n-(k-1)]3^{k-1}} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} \frac{n+k-1}{[n-(k-1)]3^{k-1}} +$$

$$+\frac{2}{3}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{[n-(k-1)]3^{k-1}} = \frac{1}{3}\sum_{i=0}^{n-1} \frac{n+i}{(n-i)3^i} + \frac{2}{3}\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{(n-i)3^i} =$$ **2p**

$$= \frac{1}{3}(1+S_n) + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{n} + \sigma_n\right) < \frac{1}{3}\left(1 + \frac{11}{9}\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{3}\right) < \frac{11}{9}$$ **1p**

Total **7p**

3. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir monoton de numere reale. Să se arate că şirul (a_n) este progresie aritmetică dacă şi numai dacă este adevărată egalitatea:

$$a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2=\frac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}{n}+\frac{n(n^2-1)(a_2-a_1)^2}{12}$$

pentru orice $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$.

Dumitru Barac, Sibiu

Soluţie Notăm $a_2-a_1=r$.

Necesitatea. Avem $a_k=a_1+(k-1)r$, $k=1,2,\ldots,n$ **1p**

$$\sum_{k=1}^{n}a_k^2-\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^2=\sum_{k=1}^{n}[a_1+(k-1)r]^2-\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}[a_1+(k-1)r]\right)^2=$$

$$=na_1^2+2a_1r\sum_{k=1}^{n}(k-1)+r^2\sum_{k=1}^{n}(k-1)^2-\frac{1}{n}\left(na_1+\frac{(n-1)nr}{2}\right)^2=$$

$$=na_1^2+a_1(n-1)nr+\frac{(n-1)n(2n-1)r^2}{6}-na_1^2-(n-1)na_1r-\frac{(n-1)^2nr^2}{4}=$$

$$=\frac{(n-1)n(n+1)r^2}{12}=\frac{n(n^2-1)(a_2-a_1)^2}{12}$$ **2p**

Suficienţa. Formulăm $P(n):a_n=a_1+(n-1)r$. Afirmaţiile $P(1)$ şi $P(2)$ sunt banal adevărate **1p**

Presupunem că afirmaţiile $P(1),P(2),\ldots,P(n)$ sunt adevărate. Înlocuind în:

$$a_1^2+\ldots+a_n^2+a_{n+1}^2=\frac{(a_1+\ldots+a_n+a_{n+1})^2}{n+1}+\frac{(n+1)n(n+2)(a_2-a_1)^2}{12}$$

şi folosind calculele din partea de necesitate, rezultă:

$$na_1^2+a_1(n-1)nr+\frac{(n-1)n(2n-1)r^2}{6}+a_{n+1}^2=$$

$$=\frac{1}{n+1}\left(na_1+\frac{(n-1)nr}{2}+a_{n+1}\right)^2+\frac{(n+1)n(n+2)(a_2-a_1)^2}{12}\Leftrightarrow$$ **1p**

$$\Leftrightarrow\frac{n}{n+1}a_{n+1}^2-\frac{2}{n+1}\left(na_1+\frac{(n-1)nr}{2}\right)a_{n+1}+\ldots=0,$$ ecuaţie de gradul doi în a_{n+1} care, conform necesităţii, are o soluţie $a'_{n+1}=a_1+nr$ şi, conform primei relaţii a lui Viète, mai are soluţia

$a''_{n+1}=2a_1+(n-1)r-a'_{n+1}=a_1-r$ **1p**

Deoarece şirul (a_n) este monoton, din $(a_{n+1}-a_1)(a_n-a_1)\geq 0$ rezultă că doar $a_{n+1}=a'_{n+1}=a_1+nr$ convine. Rezultă că şi afirmaţia $P(n+1)$ este adevărată. Conform principiului inducţiei matematice, rezultă că $a_n=a_1+(n-1)r$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, deci şirul (a_n) este progresie aritmetică **1p**

Total **7p**

4. Notăm a, b, c lungimile laturilor unui triunghi şi r lungimea razei cercului înscris. Să se arate că

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\leq\frac{\sqrt{3}}{4r}.$$

Petru Vlad şi Dumitru Barac, Sibiu

Soluţie Utilizând inegalitatea mediilor $m_g \leq m_a$: **1p**
avem:
$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\leq\frac{1}{2\sqrt{ab}}+\frac{1}{2\sqrt{bc}}+\frac{1}{2\sqrt{ca}}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{2\sqrt{abc}}$$ **1p**

Acum folosim inegalitatea mediilor $m_a \leq m_p$: **1p**
si obţinem:
$$\sum\frac{1}{a+b}\leq\frac{\sqrt{3(a+b+c)}}{2\sqrt{abc}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3\cdot 2p}{4R\cdot S}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2R\cdot r}}$$ **2p**

Cu inegalitatea lui Euler $R \geq 2r$ **1p**

obţinem:

$\sum\frac{1}{a+b}\leq\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{4r^2}}=\frac{\sqrt{3}}{4r}$ **1p**

Total **7p**