



Asociațiunea ASTRA – 150 de ani de la înființare (1861-2011)

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ  
„GHEORGHE LAZĂR”

Ediția a XII-a, 25-27 martie 2011

SIBIU

Clasa a IX-a

1. Fie  $ABC$  un triunghi în care  $\angle A = 2\angle C$ .  
Să se arate că  $BC^2 - AB^2 = AB \cdot AC$

*GM 1/2011, C.O:5103*

2. Să se demonstreze că:

a) 
$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(n-k)3^k} \leq \frac{1}{3},$$
 pentru orice  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ ;

b) 
$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{n+k}{(n-k)3^k} \leq \frac{11}{9},$$
 pentru orice  $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ .

*Emil C. Popa, Sibiu*

3. Fie  $(a_n)_{n \geq 1}$  un șir monoton de numere reale. Să se arate că șirul  $(a_n)$  este progresie aritmetică dacă și numai dacă este adevărată egalitatea:

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{n} + \frac{n(n^2 - 1)(a_2 - a_1)^2}{12}$$

pentru orice  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ .

*Dumitru Barac, Sibiu*

4. Notăm  $a, b, c$  lungimile laturilor unui triunghi și  $r$  lungimea razei cercului înscris.  
Să se arate că

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \leq \frac{\sqrt{3}}{4r}.$$

*Petru Vlad și Dumitru Barac, Sibiu*

**Notă:** Toate subiectele sunt obligatorii.

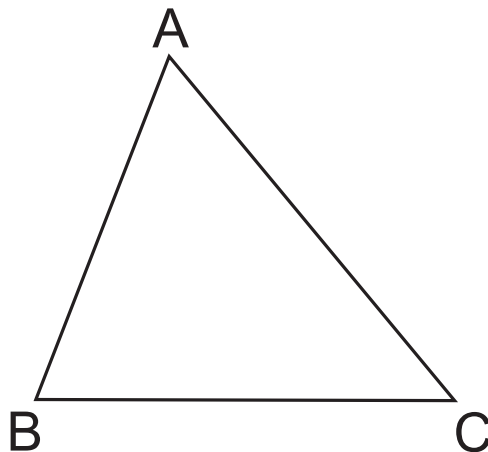
Timp de lucru: 3 ore.

**CLASA IX-a**  
**BAREM DE CORECTARE**

1. Fie  $ABC$  un triunghi în care  $\angle A = 2\angle C$ .  
Să se arate că  $BC^2 - AB^2 = AB \cdot AC$

*GM 1/2011, C.O:5103*

**Soluție** Figura



Teorema cosinusului dă:

$$(1) AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2AC \cdot BC \cos C \dots\dots\dots 1p$$

Teorema sinusului dă:

$$\frac{BC}{\sin 2C} = \frac{AB}{\sin C} \dots\dots\dots 1p$$

de unde:

$$\cos C = \frac{BC}{2AB} \dots\dots\dots 1p$$

Înlocuind  $\cos C$  în (1), obținem:

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - \frac{AC \cdot BC^2}{AB} \dots\dots\dots 1p$$

sau

$$AB^3 - AB \cdot BC^2 - AB \cdot AC^2 + AC \cdot BC^2 = 0$$

sau

$$BC^2(AC - AB) + AB(AB^2 - AC^2) = 0$$

sau

$$(AC - AB)(BC^2 - AB \cdot AC - AB^2 - AC^2) = 0 \dots\dots\dots \mathbf{2p}$$

Cum  $AC \neq AB$ , rezultă

$$BC^2 - AB^2 - AB \cdot AC = 0$$

$$\text{de unde } BC^2 - AB^2 = AB \cdot AC, \text{ q.e.d. } \dots\dots\dots \mathbf{1p}$$

$$\mathbf{Total} \dots\dots\dots \mathbf{7p}$$

2. Să se demonstreze că:

a) 
$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(n-k)3^k} \leq \frac{1}{3}, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}, n \geq 2;$$

b) 
$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{n+k}{(n-k)3^k} \leq \frac{11}{9}, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}, n \geq 3.$$

Emil C. Popa, Sibiu

**Soluție** a) Notăm  $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(n-k)3^k}$ .

Avem

$\sigma_2 = \frac{1}{3} \leq \frac{1}{3}$  ..... **1p**

Pentru un  $n \geq 2$  presupunem că  $\sigma_n \leq \frac{1}{3}$  este adevărată și avem:

$$\begin{aligned} \sigma_{n+1} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \frac{1}{[n-(k-1)]3^{k-1}} = \frac{1}{3} \sum_{i=0}^n \frac{1}{(n-i)3^i} = \\ &= \frac{1}{3} \left( \frac{1}{n} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(n-i)3^i} \right) \leq \frac{1}{3} \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{3} \right) < \frac{1}{3} \dots\dots\dots \mathbf{2p} \end{aligned}$$

b) Notăm  $S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n+k}{(n-k)3^k} \leq \frac{11}{9}$ . Avem  $S_3 = \frac{11}{9} \leq \frac{11}{9}$  ..... **1p**

Pentru un  $n \geq 3$  presupunem că  $S_n \leq \frac{11}{9}$  este adevărată și avem:

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \frac{n+k+1}{[n-(k-1)]3^{k-1}} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \frac{n+k-1}{[n-(k-1)]3^{k-1}} + \\ &+ \frac{2}{3} \sum_{k=1}^n \frac{1}{[n-(k-1)]3^{k-1}} = \frac{1}{3} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{n+i}{(n-i)3^i} + \frac{2}{3} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{(n-i)3^i} = \dots\dots\dots \mathbf{2p} \\ &= \frac{1}{3}(1+S_n) + \frac{2}{3} \left( \frac{1}{n} + \sigma_n \right) < \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{11}{9} \right) + \frac{2}{3} \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{3} \right) < \frac{11}{9} \dots\dots\dots \mathbf{1p} \end{aligned}$$

**Total**..... **7p**

3. Fie  $(a_n)_{n \geq 1}$  un șir monoton de numere reale. Să se arate că șirul  $(a_n)$  este progresie aritmetică dacă și numai dacă este adevărată egalitatea:

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{n} + \frac{n(n^2 - 1)(a_2 - a_1)^2}{12}$$

pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ .

Dumitru Barac, Sibiu

**Soluție** Notăm  $a_2 - a_1 = r$ .

*Necesitatea.* Avem  $a_k = a_1 + (k - 1)r$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  ..... **1p**

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_{k=1}^n a_k \right)^2 &= \sum_{k=1}^n [a_1 + (k - 1)r]^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_{k=1}^n [a_1 + (k - 1)r] \right)^2 = \\ &= na_1^2 + 2a_1r \sum_{k=1}^n (k - 1) + r^2 \sum_{k=1}^n (k - 1)^2 - \frac{1}{n} \left( na_1 + \frac{(n - 1)nr}{2} \right)^2 = \\ &= na_1^2 + a_1(n - 1)nr + \frac{(n - 1)n(2n - 1)r^2}{6} - na_1^2 - (n - 1)na_1r - \frac{(n - 1)^2nr^2}{4} = \\ &= \frac{(n - 1)n(n + 1)r^2}{12} = \frac{n(n^2 - 1)(a_2 - a_1)^2}{12} \dots\dots\dots \mathbf{2p} \end{aligned}$$

*Suficiența.* Formulăm  $P(n) : a_n = a_1 + (n - 1)r$ . Afirmățiile  $P(1)$  și  $P(2)$  sunt banal adevărate ..... **1p**

Presupunem că afirmațiile  $P(1), P(2), \dots, P(n)$  sunt adevărate. Înlocuind în:

$$a_1^2 + \dots + a_n^2 + a_{n+1}^2 = \frac{(a_1 + \dots + a_n + a_{n+1})^2}{n + 1} + \frac{(n + 1)n(n + 2)(a_2 - a_1)^2}{12}$$

și folosind calculele din partea de necesitate, rezultă:

$$\begin{aligned} na_1^2 + a_1(n - 1)nr + \frac{(n - 1)n(2n - 1)r^2}{6} + a_{n+1}^2 &= \\ &= \frac{1}{n + 1} \left( na_1 + \frac{(n - 1)nr}{2} + a_{n+1} \right)^2 + \frac{(n + 1)n(n + 2)(a_2 - a_1)^2}{12} \Leftrightarrow \dots\dots\dots \mathbf{1p} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n}{n + 1}a_{n+1}^2 - \frac{2}{n + 1} \left( na_1 + \frac{(n - 1)nr}{2} \right) a_{n+1} + \dots = 0, \text{ ecuație de gradul}$$

doi în  $a_{n+1}$  care, conform necesității, are o soluție  $a'_{n+1} = a_1 + nr$  și, conform primei relații a lui Viète, mai are soluția

$$a''_{n+1} = 2a_1 + (n - 1)r - a'_{n+1} = a_1 - r \dots\dots\dots \mathbf{1p}$$

Deoarece șirul  $(a_n)$  este monoton, din  $(a_{n+1} - a_1)(a_n - a_1) \geq 0$  rezultă că

doar  $a_{n+1} = a'_{n+1} = a_1 + nr$  convine. Rezultă că și afirmația  $P(n + 1)$  este

adevărată. Conform principiului inducției matematice, rezultă că

$a_n = a_1 + (n - 1)r$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , deci șirul  $(a_n)$  este progresie aritmetică ..... **1p**

**Total** ..... **7p**

4. Notăm  $a, b, c$  lungimile laturilor unui triunghi și  $r$  lungimea razei cercului înscris. Să se arate că

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \leq \frac{\sqrt{3}}{4r}.$$

*Petru Vlad și Dumitru Barac, Sibiu*

**Soluție** Utilizând inegalitatea mediilor  $m_g \leq m_a$ : ..... **1p**  
avem:

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \leq \frac{1}{2\sqrt{ab}} + \frac{1}{2\sqrt{bc}} + \frac{1}{2\sqrt{ca}} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}{2\sqrt{abc}} \dots\dots\dots \mathbf{1p}$$

Acum folosim inegalitatea mediilor  $m_a \leq m_p$ : ..... **1p**  
și obținem:

$$\sum \frac{1}{a+b} \leq \frac{\sqrt{3(a+b+c)}}{2\sqrt{abc}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3 \cdot 2p}{4R \cdot S}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2R \cdot r}} \dots\dots\dots \mathbf{2p}$$

Cu inegalitatea lui Euler  $R \geq 2r$  ..... **1p**

obținem:

$$\sum \frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{4r^2}} = \frac{\sqrt{3}}{4r} \dots\dots\dots \mathbf{1p}$$

**Total** ..... **7p**