Asociațiunea ASTRA – 150 de ani de la înființare (1861-2011)

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ „GHEORGHE LAZĂR”
Ediția a XII-a, 25-27 martie 2011
SIBIU

Clasa a VIII-a

1) Să se arate că în orice triunghi avem

$$p^2 \le m_a^2 + m_b^2 + m_c^2,$$

unde p reprezintă semiperimetrul iar m_a, m_b, m_c respectiv lungimile medianelor.

GM 1/2011

2) Fie $k, n \in \mathbb{N}$, $k \ge 2$, $n \ge 1$ şi $x > 0$. Arătaţi că au loc inegalităţile:

i) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{x+i+k-1}{\sqrt[k]{x+i}} > k(n+1)\,;$

ii) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{\sqrt[k]{x+i}}{x+i+k-1} < \frac{n+1}{k}\,.$

Dumitru Acu, Sibiu

3) Se consideră numerele reale $a, b, c, d \in (0, \infty)$ şi $-a-c < \beta \le \alpha < b+d$. Să se demonstreze că:

a) $\displaystyle 1 + \frac{c+\alpha}{a} + \frac{a+c+\alpha}{b+c+d} \ge \frac{4(a+c+\alpha)}{a+b+c+d}\,;$

b) $\displaystyle \frac{c+\alpha}{a} + \frac{b+d-\beta}{a+c+d} + \frac{a+c+\alpha}{b+c+d} + \frac{d-\beta}{b} \ge 2\,.$

Emil C. Popa, Sibiu

4) Fie paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ cu dimensiunile a, b, c. Să se arate că paralelipipedul este cub dacă şi numai dacă

$$(a+b+c)\mathrm{d}^2(A, (A'BD)) \ge abc.$$

Petru Vlad, Sibiu

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru: 3 ore.

CLASA VIII-a
BAREM DE CORECTARE

1) Să se arate că în orice triunghi avem

$$p^2 \leq m_a^2 + m_b^2 + m_c^2,$$

unde p reprezintă semiperimetrul iar m_a, m_b, m_c respectiv lungimile medianelor.

Florin Rotaru, Focşani, CO:5085, GM 1/2011

Cum $p = \dfrac{a+b+c}{2}$, $m_a^2 = \dfrac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}$,

$m_b^2 = \dfrac{2(c^2+a^2)-b^2}{4}$, $m_c^2 = \dfrac{2(a^2+b^2)-c^2}{4}$ 3p

inegalitatea din enunţ devine $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$ 2p

echivalentă cu $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$, inegalitate adevărată 2p

TOTAL 7p

2) Fie $k, n \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, $n \geq 1$ şi $x > 0$. Arătaţi că au loc inegalităţile:

i) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{x+i+k-1}{\sqrt[k]{x+i}} > k(n+1)\,;$

ii) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{\sqrt[k]{x+i}}{x+i+k-1} < \frac{n+1}{k}\,.$

Dumitru Acu, Sibiu

Avem: (1) $\displaystyle\frac{x+i+k-1}{k} \geq \sqrt[k]{(x+i)\cdot \underbrace{1\cdot 1\cdot \ldots \cdot 1}_{k-1}} = \sqrt[k]{x+i}$

(pentru $i > 0$ inegalitatea fiind strictă) 3p

i) Din (1) avem: $\displaystyle\frac{x+i+k-1}{\sqrt[k]{x+i}} \geq k$, $i = 0, 1, \ldots, n$, de unde rezultă

$\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{x+i+k-1}{\sqrt[k]{x+i}} > k(n+1)$ 2p

ii) Tot din (1) putem scrie: $\displaystyle\frac{\sqrt[k]{x+i}}{x+i+k-1} \leq \frac{1}{k}$, $i = 0, 1, \ldots, n$,

de unde deducem $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{\sqrt[k]{x+i}}{x+i+k-1} < \frac{n+1}{k}$ 2p

TOTAL 7p

3) Se consideră numerele reale $a, b, c, d \in (0, \infty)$ şi $-a - c < \beta \leq \alpha < b + d$. Să se demonstreze că:

a) $1 + \dfrac{c+\alpha}{a} + \dfrac{a+c+\alpha}{b+c+d} \geq \dfrac{4(a+c+\alpha)}{a+b+c+d}$;

b) $\dfrac{c+\alpha}{a} + \dfrac{b+d-\beta}{a+c+d} + \dfrac{a+c+\alpha}{b+c+d} + \dfrac{d-\beta}{b} \geq 2$.

Emil C. Popa, Sibiu

a) Avem: $1 + \dfrac{c+\alpha}{a} + \dfrac{a+c+\alpha}{b+c+d} = (a+c+\alpha)\Big(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b+c+d}\Big) =$

$= (a+c+\alpha)\dfrac{a+b+c+d}{a(b+c+d)} \geq (a+c+\alpha)\dfrac{a+b+c+d}{\frac{(a+b+c+d)^2}{4}} = \dfrac{4(a+c+\alpha)}{a+b+c+d}$ 3p

b) Apoi, analog, avem: $1 + \dfrac{d-\beta}{b} + \dfrac{b+d-\beta}{a+c+d} = (b+d-\beta)\Big(\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{a+c+d}\Big) =$

$(b+d-\beta)\dfrac{a+b+c+d}{b(a+c+d)} \geq (b+d-\beta)\dfrac{a+b+c+d}{\frac{(a+b+c+d)^2}{4}} = \dfrac{4(b+d-\beta)}{a+b+c+d}$.................3p

Deci, cu punctul a),

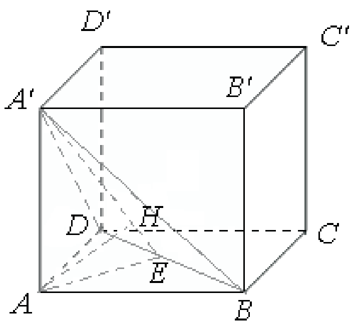
$1 + \dfrac{c+\alpha}{a} + \dfrac{a+c+\alpha}{b+c+d} + 1 + \dfrac{d-\beta}{b} + \dfrac{b+d-\beta}{a+c+d} \geq \dfrac{4(a+b+c+d+\alpha-\beta)}{a+b+c+d} \geq 4$...... 1p

TOTAL 7p

4) Fie paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ cu dimensiunile a, b, c. Să se arate că paralelipipedul este cub dacă şi numai dacă

$$(a+b+c)\mathrm{d}^2(A,(A'BD)) \geq abc.$$

Petru Vlad, Sibiu



Fie $AE \perp BD$, atunci $A'E \perp BD$. În $\triangle AA'E$, avem
$AH \perp A'E$, $BD \perp (AA'E) \Rightarrow AH \perp (A'BD)$ deci $\mathrm{d}(A,(A'BD)) = AH$ 2p

Se calculează $AH = \dfrac{abc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}$ 2p

Atunci $(a+b+c)AH^2 \geq abc \Leftrightarrow (a+b+c)\dfrac{(abc)^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2} \geq abc \Leftrightarrow$
$abc(a+b+c) \geq a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 | \cdot 2 \Leftrightarrow (ab-bc)^2+(bc-ca)^2+(ca-ab)^2 \leq 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a=b=c$ 2p

Reciproc, în cazul $a=b=c$ se obţine egalitate în relaţia din enunţ 1p

TOTAL 7p