



Asociațiunea ASTRA – 150 de ani de la înființare (1861-2011)

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ
„GHEORGHE LAZĂR”

Ediția a XII-a, 25-27 martie 2011

SIBIU

Clasa a VIII-a

1) Să se arate că în orice triunghi avem

$$p^2 \leq m_a^2 + m_b^2 + m_c^2,$$

unde p reprezintă semiperimetrul iar m_a, m_b, m_c respectiv lungimile medianelor.

GM 1/2011

2) Fie $k, n \in \mathbb{N}, k \geq 2, n \geq 1$ și $x > 0$. Arătați că au loc inegalitățile:

i)
$$\sum_{i=0}^n \frac{x+i+k-1}{\sqrt[k]{x+i}} > k(n+1);$$

ii)
$$\sum_{i=0}^n \frac{\sqrt[k]{x+i}}{x+i+k-1} < \frac{n+1}{k}.$$

Dumitru Acu, Sibiu

3) Se consideră numerele reale $a, b, c, d \in (0, \infty)$ și $-a - c < \beta \leq \alpha < b + d$. Să se demonstreze că:

a)
$$1 + \frac{c+\alpha}{a} + \frac{a+c+\alpha}{b+c+d} \geq \frac{4(a+c+\alpha)}{a+b+c+d};$$

b)
$$\frac{c+\alpha}{a} + \frac{b+d-\beta}{a+c+d} + \frac{a+c+\alpha}{b+c+d} + \frac{d-\beta}{b} \geq 2.$$

Emil C. Popa, Sibiu

4) Fie paralelipipedul dreptunghic $ABCD A' B' C' D'$ cu dimensiunile a, b, c . Să se arate că paralelipipedul este cub dacă și numai dacă

$$(a+b+c)d^2(A, (A'BD)) \geq abc.$$

Petru Vlad, Sibiu

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru: 3 ore.

CLASA VIII-a
BAREM DE CORECTARE

1) Să se arate că în orice triunghi avem

$$p^2 \leq m_a^2 + m_b^2 + m_c^2,$$

unde p reprezintă semiperimetrul iar m_a, m_b, m_c respectiv lungimile medianelor.

Florin Rotaru, Focșani, CO:5085, GM 1/2011

$$\text{Cum } p = \frac{a+b+c}{2}, m_a^2 = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4},$$

$$m_b^2 = \frac{2(c^2+a^2)-b^2}{4}, m_c^2 = \frac{2(a^2+b^2)-c^2}{4} \dots\dots\dots 3p$$

inegalitatea din enunț devine $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2) \dots\dots\dots 2p$

echivalentă cu $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$, inegalitate adevărată $\dots\dots\dots 2p$

TOTAL $\dots\dots\dots 7p$

2) Fie $k, n \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, $n \geq 1$ și $x > 0$. Arătați că au loc inegalitățile:

i)
$$\sum_{i=0}^n \frac{x+i+k-1}{\sqrt[k]{x+i}} > k(n+1);$$

ii)
$$\sum_{i=0}^n \frac{\sqrt[k]{x+i}}{x+i+k-1} < \frac{n+1}{k}.$$

Dumitru Acu, Sibiu

Avem: (1)
$$\frac{x+i+k-1}{k} \geq \sqrt[k]{(x+i) \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1}_{k-1}} = \sqrt[k]{x+i}$$

(pentru $i > 0$ inegalitatea fiind strictă) 3p

i) Din (1) avem: $\frac{x+i+k-1}{\sqrt[k]{x+i}} \geq k, i = 0, 1, \dots, n$, de unde rezultă

$$\sum_{i=0}^n \frac{x+i+k-1}{\sqrt[k]{x+i}} > k(n+1)$$
 2p

ii) Tot din (1) putem scrie: $\frac{\sqrt[k]{x+i}}{x+i+k-1} \leq \frac{1}{k}, i = 0, 1, \dots, n$,

de unde deducem
$$\sum_{i=0}^n \frac{\sqrt[k]{x+i}}{x+i+k-1} < \frac{n+1}{k}$$
 2p

TOTAL 7p

3) Se consideră numerele reale $a, b, c, d \in (0, \infty)$ și $-a - c < \beta \leq \alpha < b + d$. Să se demonstreze că:

a) $1 + \frac{c + \alpha}{a} + \frac{a + c + \alpha}{b + c + d} \geq \frac{4(a + c + \alpha)}{a + b + c + d}$;

b) $\frac{c + \alpha}{a} + \frac{b + d - \beta}{a + c + d} + \frac{a + c + \alpha}{b + c + d} + \frac{d - \beta}{b} \geq 2$.

Emil C. Popa, Sibiu

a) Avem: $1 + \frac{c + \alpha}{a} + \frac{a + c + \alpha}{b + c + d} = (a + c + \alpha) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b + c + d} \right) =$
 $= (a + c + \alpha) \frac{a + b + c + d}{a(b + c + d)} \geq (a + c + \alpha) \frac{a + b + c + d}{\frac{(a + b + c + d)^2}{4}} = \frac{4(a + c + \alpha)}{a + b + c + d} \dots\dots\dots 3p$

b) Apoi, analog, avem: $1 + \frac{d - \beta}{b} + \frac{b + d - \beta}{a + c + d} = (b + d - \beta) \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a + c + d} \right) =$
 $(b + d - \beta) \frac{a + b + c + d}{b(a + c + d)} \geq (b + d - \beta) \frac{a + b + c + d}{\frac{(a + b + c + d)^2}{4}} = \frac{4(b + d - \beta)}{a + b + c + d} \dots\dots\dots 3p$

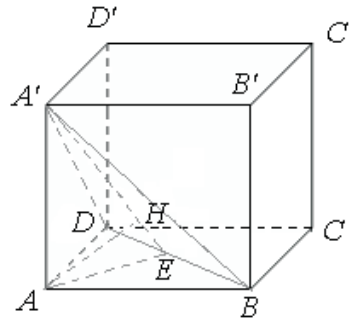
Deci, cu punctul a),
 $1 + \frac{c + \alpha}{a} + \frac{a + c + \alpha}{b + c + d} + 1 + \frac{d - \beta}{b} + \frac{b + d - \beta}{a + c + d} \geq \frac{4(a + b + c + d + \alpha - \beta)}{a + b + c + d} \geq 4 \dots\dots\dots 1p$

TOTAL 7p

4) Fie paralelipipedul dreptunghic $ABCD A' B' C' D'$ cu dimensiunile a, b, c . Să se arate că paralelipipedul este cub dacă și numai dacă

$$(a + b + c)d^2(A, (A'BD)) \geq abc.$$

Petru Vlad, Sibiu



Fie $AE \perp BD$, atunci $A'E \perp BD$. În $\triangle AA'E$, avem
 $AH \perp A'E$, $BD \perp (AA'E) \Rightarrow AH \perp (A'BD)$ deci $d(A, (A'BD)) = AH$ 2p

Se calculează $AH = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$ 2p

Atunci $(a + b + c)AH^2 \geq abc \Leftrightarrow (a + b + c) \frac{(abc)^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} \geq abc \Leftrightarrow$
 $abc(a + b + c) \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \cdot 2 \Leftrightarrow (ab - bc)^2 + (bc - ca)^2 + (ca - ab)^2 \leq 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow a = b = c$ 2p

Reciproc, în cazul $a = b = c$ se obține egalitate în relația din enunț 1p

TOTAL 7p