Asociațiunea ASTRA – 150 de ani de la înființare (1861-2011)

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ „GHEORGHE LAZĂR”
Ediția a XII-a, 25-27 martie 2011
SIBIU

Clasa a VII-a

1. Pe un cerc sunt 11 numere naturale astfel încât suma oricăror 3 numere alăturate este cel mult 19, iar suma oricăror 4 numere alăturate este cel puţin 25. Să se determine suma celor 11 numere.

GM 12/2010

2. Într-un triunghi ABC avem punctele $P \in (BC)$ şi $O \in (AP)$ astfel ca $m(\widehat{BAP}) = m(\widehat{OBC}) = 30°$. Arătaţi că dacă aria triunghi ABC este de patru ori mai mare decât aria triunghiului OBC, atunci triunghiul ABC este dreptunghic.

Emil C. Popa, Sibiu

3. Să se detrmine numerele prime a şi b pentru care $a \cdot b + 7$ şi $ab - 7$ sunt, de asemenea, prime.

Dumitru Acu, Sibiu

4. Fie triunghiul ABC în care $AB = AC$, $m(\widehat{BAC}) < 90°$, iar $D \in (BC)$, $E \in (AC)$ şi $F \in (AB)$ sunt respectiv picioarele înălţimilor duse din vârfurile A, B respectiv C. Notăm cu $\{H\} = AD \cap BE \cap CF$ (ortocentrul unghiului ABC) şi cu P intersecţia bisectoarei unghiului ABH cu AH. Să se arate că $m(\widehat{AFP}) = 45°$.

Petrică Dicu, Sibiu

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru: 3 ore.

CLASA VII-a
BAREM DE CORECTARE

1. Pe un cerc sunt 11 numere naturale astfel încât suma oricăror 3 numere alăturate este cel mult 19, iar suma oricăror 4 numere alăturate este cel puţin 25. Să se determine suma celor 11 numere.

GM 12/2010

Soluţie Fie $a_1, a_2, ..., a_{11}$ cele 11 numere naturale.

Prima din condiţii ne conduce la:

$a_1 + a_2 + a_3 \quad \leq 19$
$a_2 + a_3 + a_4 \quad \leq 19$
$\vdots$
$a_9 + a_{10} + a_{11} \quad \leq 19$
$a_{10} + a_{11} + a_1 \quad \leq 19$
$a_{11} + a_1 + a_2 \quad \leq 19$ **2p**

De unde prin adunare obţinem:

(1) $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{11} \leq \dfrac{19 \cdot 11}{3} = \dfrac{209}{3} = 69,6$ **1p**

A doua condiţie ne conduce la:

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \quad \geq 25$
$a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \quad \geq 25$
$\vdots$
$a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} \geq 25$
$a_9 + a_{10} + a_{11} + a_1 \geq 25$
$a_{10} + a_{11} + a_1 + a_2 \geq 25$
$a_{11} + a_1 + a_2 + a_3 \quad \geq 25$ **2p**

De unde prin adunare obţinem:

(2) $a_1 + a_2 + ... + a_{11} \geq \dfrac{25 \cdot 11}{4} = \dfrac{275}{4} = 68,7$ **1p**

Cum $a_1 + a_2 + ... + a_{11} \in \mathbb{N}$, din (1) şi (2) rezultă:

$a_1 + a_2 + ... + a_{11} = 69$ **1p**
Total **7p**

2. Într-un triunghi ABC avem punctele $P \in (BC)$ şi $O \in (AP)$ astfel ca $m(\widehat{BAP}) = m(\widehat{OBC}) = 30°$. Arătaţi că dacă aria triunghi ABC este de patru ori mai mare decât aria triunghiului OBC, atunci triunghiul ABC este dreptunghic.

Emil C. Popa, Sibiu

Soluţie

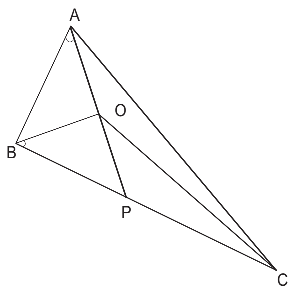

Figura **1p**

$\Delta BPO \sim \Delta APB (m(\widehat{BPO}) = m(\widehat{BPA}), m(\widehat{OBP}) = m(\widehat{BAP}) = 30°)$ deci

(1) $\dfrac{BP}{AP} = \dfrac{OP}{BP}$ sau (2) $BP^2 = AP \cdot OP$ **1p**

Avem

(3) $\dfrac{AP^2}{BP^2} = \dfrac{AP^2}{AP \cdot OP} = \dfrac{AP}{OP}$ **1p**

Dar Notăm aria triunghiului ABC cu S_{ABC}.

(4) $\dfrac{AP}{OP} = \dfrac{S_{APB}}{S_{OPB}} = \dfrac{S_{APC}}{S_{OPC}} = \dfrac{S_{APB} + S_{APC}}{S_{OPB} + S_{OPC}} = \dfrac{S_{ABC}}{S_{OBC}} = 4$ **1p**

Deci, folosind (3) obţinem:

$AP = 2PB$ **1p**

Ducem $PB' \perp AB$ şi avem:

$\sin 30° = \frac{PB'}{AP} = \frac{PB}{AP}$ **1p**

Rezultă că $B \equiv B'$ şi triunghiul ABC este dreptunghic $(m(\widehat{ABC}) = 90°)$ **1p**

Total **7p**

3. Să se detrmine numerele prime a şi b pentru care $a \cdot b + 7$ şi $ab - 7$ sunt, de asemenea, prime.

Dumitru Acu, Sibiu

Soluţie Daca a şi b ar fi numere prime impare, atunci $ab + 7$ ar fi număr par, deci compus **0,5p**

Dacă $a = b = 2$, atunci $ab - 7 < 0$ **0,5p**

Dacă $a = 2$ şi $b = 3$, avem $ab - 7 = -1 < 0$ **0,5p**

Dacă $a = 2$ şi $b = 5$, avem $ab + 7 = 17$ şi $ab - 7 = 3$, numere prime **1p**

Dacă b este număr prim, $b \geq 5$, atunci b are una din

formele $6k + 1$ sau $6k - 1$, $k = 1, 2, ...$ **1p**

Pentru $b = 6k + 1$, avem $2b + 7 = 12k + 9 = 3(4k + 1)$, care este număr compus pentru $k = 1, 2, ...$ **1p**

Pentru $b = 6k - 1$, avem $2b - 7 = 12k - 9 = 3(4k - 3)$, care este număr compus pentru $k = 2, 3, ...$ **1p**

Pentru $k = 1$, obţinem 3, care este număr prim **0,5p**

Aşadar, soluţiile problemei sunt:

$a = 2$, $b = 5$ şi $a = 5$, $b = 2$ **1p**

Total **7p**

4. Fie triunghiul ABC în care $AB = AC$, $m(\widehat{BAC}) < 90°$, iar $D \in (BC)$, $E \in (AC)$ şi $F \in (AB)$ sunt respectiv picioarele înălţimilor duse din vârfurile A, B respectiv C. Notăm cu $\{H\} = AD \cap BE \cap CF$ (ortocentrul unghiului ABC) şi cu P intersecţia bisectoarei unghiului ABH cu AH. Să se arate că $m(\widehat{AFP}) = 45°$.

Petrică Dicu, Sibiu

Soluţie

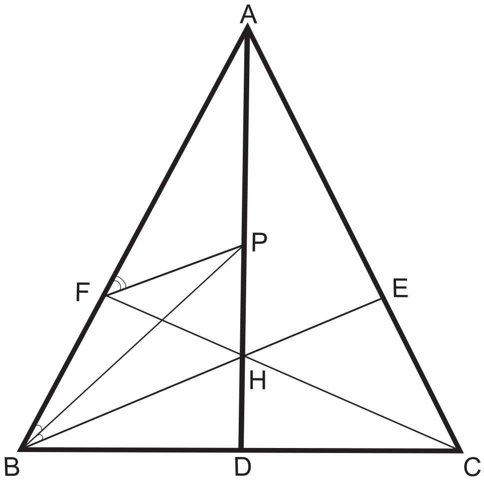

Figura **1p**

Conform teoremei bisectoarei avem: (1) $\frac{AP}{PH} = \frac{AB}{BH}$ **1p**

$\Delta ADC \sim \Delta BDH (m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{DBH}))$

$m(\widehat{ADC}) = m(\widehat{BDH}) = 90°) \Rightarrow$

$\frac{AC}{BH} = \frac{AD}{BD} = \frac{CD}{HD}$ **1p**

ΔABC isoscel $\Rightarrow AB = AC, BD = DC$, deci

(2) $\frac{AB}{BH} = \frac{AD}{BD}$ **1p**

$\Delta AFH \sim \Delta ADB (m(\widehat{FAH}) = m(\widehat{BAD}), m(\widehat{AFH}) = m(\widehat{ADB}) = 90°)$,

$\frac{AF}{AD} = \frac{FH}{BD} = \frac{AH}{AB}$ de unde (3) $\frac{AF}{FH} = \frac{AD}{BD}$ **1p**

Din (1), (2) şi (3) obţinem $\frac{AP}{PH} = \frac{AF}{FH}$, adică FP bisectoarea unghiului AFH **1p**

Cum $m(\widehat{AFH}) = 90°$ rezultă $m(\widehat{AFP}) = 45°$ **1p**

Total **7p**