Asociațiunea ASTRA – 150 de ani de la înființare (1861-2011)

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ „GHEORGHE LAZĂR”

Ediția a XII-a, 25-27 martie 2011

SIBIU

Clasa a XII-a

1. a) Fie G un grup finit cu n elemente şi o submulţime $H \subseteq G$, H cu cel puţin $\left[\frac{n}{2}\right] + 1$ elemente. Să se arate că $\{ab | a, b \in H\} = G$.

b) Să se dea exemplu de un grup finit G cu $n \geq 4$ elemente şi de o submulţime a sa H cu $\left[\frac{n}{2}\right]$ elemente pentru care $\{ab | a, b \in H\} \neq G$.

GM 6/2010

2. Dacă $-\infty < a < b < +\infty$ şi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă astfel ca

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(t)dt \cdot \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(t)dt < 0,$$

atunci există $\alpha, \beta \in (a, b), \alpha \neq \beta$, astfel ca $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(t)dt = 0$.

Emil C. Popa, Sibiu

3. Fie $a > 0$ şi $f : [0, a] \to [0, a]$ o funcţie integrabilă pe $[0, a]$ aşa încât $(f \circ f \circ f)(x) = a - x$, pentru orice $x \in [0, a]$. Demonstraţi că:

$$I(x) = \int_x^{a-x} f(t)dt = \frac{a^2 - 2ax}{2},$$

pentru orice $x \in [0, a]$.

Liana Agnola, Sibiu

4. Se consideră $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n$, cu $a_k \in \mathbb{R}, k = \overline{0, n}, a_0 \neq 0, a_n \neq 0$. Dacă a_{n-2}, a_{n-1} şi a_n sunt în progresie geometrică, arătaţi că polinomul P nu are toate rădăcinile reale.

Ioan Ţincu, Sibiu

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru: 3 ore.

CLASA XII-a
BAREM DE CORECTARE

1. a) Fie G un grup finit cu n elemente şi o submulţime $H \subseteq G$, H cu cel puţin $\left[\dfrac{n}{2}\right] + 1$ elemente. Să se arate că $\{ab | a, b \in H\} = G$.

b) Să se dea exemplu de un grup finit G cu $n \geq 4$ elemente şi de o submulţime a sa H cu $\left[\dfrac{n}{2}\right]$ elemente pentru care $\{ab | a, b \in H\} \neq G$.

GM 6/2010

Soluţie a) Fie $c \in G$ şi $A = \{cb^{-1} | b \in H\}$ **1p**

Cum $|A| = |H| \geq \left[\dfrac{n}{2}\right] + 1$ rezultă că $n \geq |A \cup H| = |A| + |H| - |A \cap H| >$
$> \dfrac{n}{2} + \dfrac{n}{2} - |A \cap H|$, ... **2p**

Deci $|A \cap H| \geq 1$ **1p**

Fie $a \in A \cap H$; atunci există $b \in H$ cu $cb^{-1} = a$, deci $c = ab$ cu $a, b \in H$. **1p**

b) Grupul $S_n, n \geq 3$ şi $H = A_n$ grupul altern al permutărilor pare din S_n **1p**

Avem $|G| = n!, |A_n| = \dfrac{n!}{2}$ şi $\{ab | a, b \in A_n\} = A_n \neq S_n = G$ **1p**

Total **7p**

2. Dacă $-\infty < a < b < +\infty$ şi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă astfel ca

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(t)dt \cdot \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(t)dt < 0,$$

atunci există $\alpha, \beta \in (a, b), \alpha \neq \beta$, astfel ca $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(t)dt = 0$.

Emil C. Popa, Sibiu

Soluţie Fie $\theta(x) = \displaystyle\int_x^{x+\frac{b-a}{2}} f(t)dt, x \in a, \frac{a+b}{2}$, continuă. **3p**

Avem $\theta(a) = \displaystyle\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(t)dt, \theta(\frac{a+b}{2}) = \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(t)dt$. **1p**

Din $\theta(a) \cdot \theta(\dfrac{a+b}{2}) < 0$ rezultă că există $\alpha \in (a, \dfrac{a+b}{2})$ cu $\theta(\alpha) = 0$,

adică $\displaystyle\int_\alpha^{\alpha+\frac{b-a}{2}} f(t)dt = 0$. **2p**

Notând $\alpha + \dfrac{b-a}{2} = \beta$, găsim egalitatea din enunţ. **1p**

Total **7p**

3. Fie $a > 0$ şi $f : [0, a] \to [0, a]$ o funcţie integrabilă pe $[0, a]$ aşa încât

$(f \circ f \circ f)(x) = a - x$, pentru orice $x \in [0, a]$. Demonstraţi că:

$$I(x) = \int_x^{a-x} f(t)dt = \frac{a^2 - 2ax}{2},$$

pentru orice $x \in [0, a]$.

Liana Agnola, Sibiu

Soluţie În relaţia $(f \circ f \circ f)(x) = a - x$ aplicăm f şi obţinem:

$(f \circ f \circ f)(f(x)) = a - f(x), \forall x \in [0, a]$ **1p**

şi $f \circ (f \circ f \circ f)(x) = f(a - x), \forall x \in [0, a]$, ... **1p**

de unde $f(a - x) = a - f(x), \forall x \in [0, a]$. **1p**

Prin urmare:

$I(x) = \int_x^{a-x} f(t)dt = \int_x^{a-x} f(a - t)dt$ **1p**

$I(x) = \int_x^{a-x} [a - f(t)]dt$ **1p**

$I(x) = at|_x^{a-x} - I(x) = a^2 - 2ax - I(x)$ **1p**

De aici $I(x) = \dfrac{a^2 - 2ax}{2}, \forall x \in [0, a]$ **1p**

Total **7p**

4. Se consideră $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n$,

cu $a_k \in \mathbb{R}, k = \overline{0,n}, a_0 \neq 0, a_n \neq 0$.

Dacă a_{n-2}, a_{n-1} şi a_n sunt în progresie geometrică, arătaţi că polinomul P nu are toate rădăcinile reale.

Ioan Ţincu, Sibiu

Soluţie Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rădăcinile lui P.

Deoarece $a_n \neq 0$ rezultă $x_k \neq 0, \forall k = \overline{1,n}$. **1p**

Se observă că $a_n = P(0), a_{n-1} = P'(0), 2a_{n-2} = P''(0)$. **1p**

Pentru $x \neq x_k$ avem $\dfrac{P'(x)}{P(x)} = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{x - x_k}$, ... **1p**

$\dfrac{P''(x)P(x) - [P'(x)]^2}{P^2(x)} = -\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(x - x_k)^2}$ **1p**

Pentru $x = 0$ se obţine $\dfrac{P''(0)P(0) - [P'(0)]^2}{P^2(0)} = -\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{x_k^2}$ **1p**

Cum a_{n-2}, a_{n-1}, a_n sunt în progresie geometrică rezultă:

$[P'(0)]^2 = \frac{1}{2}P(0)P''(0) \Leftrightarrow P(0)P''(0) = 2[P'(0)]^2$. **1p**

Prin urmare, $\left[\dfrac{P'(0)}{P(0)}\right]^2 = -\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{x_k^2}$.

În concluzie, există $x_k \in \mathbb{C}$. **1p**