Asociațiunea ASTRA – 150 de ani de la înființare (1861-2011)

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ „GHEORGHE LAZĂR"

Ediția a XII-a, 25-27 martie 2011

SIBIU

Clasa a XI-a

1. Fie $p \geq 3$ un număr natural. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^{p-1}+k^{p-2}+\ldots+k}{n^p+k^{p-2}+k^{p-3}+\ldots+k}.$$

GM 12/2010

2. Fie $-\infty < a < b < +\infty$ şi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continuă cu $f(a) = f(b) = 0$. Să se arate că pentru orice $k \in (1, \infty)$ există $\alpha \in (a, b)$ astfel ca $AP = \dfrac{b-a}{k}$, unde $A(a, 0)$ şi $P(\alpha, f(\alpha))$.

Emil C. Popa, Sibiu

3. Fie $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ cu

$$A = \begin{pmatrix} 3x & x+\frac{1}{3} & x+\frac{2}{3} \\ -1 & -1 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

Notăm cu $[A]$ matricea care are ca elemente părţile întregi ale elementelor matricei A. Să se determine valorile lui x pentru care $\det[A] = [\det A]$, unde $[\det A]$ este partea întreagă a numărului $\det A$.

Liana Agnola, Sibiu

4. Fie $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$, şi $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ astfel încât

$$A^2 + A + aI_3 = O_3 \quad .$$

Să se demonstreze că A este inversabilă şi să se calculeze $\det(A^{-4} + \frac{1}{a^4}A^4)$.

Cătălin Pană, Râmnicu Vâlcea
Dumitru Acu, Sibiu

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru: 3 ore.

CLASA XI-a
BAREM DE CORECTARE

1. Fie $p \geq 3$ un număr natural. Să se calculeze:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^{p-1}+k^{p-2}+\ldots+k}{n^p+k^{p-2}+k^{p-3}+\ldots+k}.$$

GM 12/2010

Soluţie Notăm $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k^{p-1}+k^{p-2}+\ldots+k}{n^p+k^{p-2}+k^{p-3}+\ldots+k}$.

Avem $y_n < x_n < z_n$ **1p**

unde $y_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k^{p-1}+k^{p-2}+\ldots+k}{n^p+n^{p-2}+n^{p-3}+\ldots+n} = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^{p-1}+k^{p-2}+\ldots+k)}{n^p+n^{p-2}+n^{p-3}+\ldots+n}$................ **2p**

şi $z_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k^{p-1}+k^{p-2}+\ldots+k}{n^p} = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k^{p-1}+k^{p-2}+\ldots+k)}{n^p}$........................ **2p**

Utilizând Stolz-Cesaro, găsim $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = \dfrac{1}{p}$.................................. **1p**

Pe baza criteriului cleştelui, deducem că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1}{p}$................................ **1p**

Observaţie: Problema este valabilă şi pentru $p = 2$.

Total.. **7p**

2. Fie $-\infty < a < b < +\infty$ şi $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continuă cu $f(a) = f(b) = 0$. Să se arate că pentru orice $k \in (1,\infty)$ există $\alpha \in (a,b)$ astfel ca $AP = \dfrac{b-a}{k}$, unde $A(a,0)$ şi $P(\alpha, f(\alpha))$.

Emil C. Popa, Sibiu

Soluţie Fie $\varphi(x) = (x-a)^2 + f^2(x) - \dfrac{(b-a)^2}{k^2}$,

$\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ continuă. **2p**

Avem:

$\varphi(a) = -\dfrac{(b-a)^2}{k^2} < 0$ **1p**

$\varphi(b) = (b-a)^2 - \dfrac{(b-a)^2}{k^2} = (1 - \dfrac{1}{k^2})(b-a)^2 > 0$ **1p**

Rezultă că există $\alpha \in (a,b)$ cu $\varphi(\alpha) = 0$ **1p**

şi deci $(\alpha - a)^2 + f^2(\alpha) = \dfrac{(b-a)^2}{k^2}$ **1p**

adică $AP = \dfrac{b-a}{k}$ **1p**

Total **7p**

3. Fie $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ cu

$$A = \begin{pmatrix} 3x & x+\frac{1}{3} & x+\frac{2}{3} \\ -1 & -1 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

Notăm cu $[A]$ matricea care are ca elemente părţile întregi ale elementelor matricei A.
Să se determine valorile lui x pentru care $\det[A] = [\det A]$, unde $[\det A]$ este partea întreagă a numărului $\det A$.

Liana Agnola, Sibiu

Soluţie $\det[A] = \begin{vmatrix} [3x] & [x+\frac{1}{3}] & [x+\frac{2}{3}] \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = [3x] - [x+\frac{2}{3}] - [x+\frac{1}{3}]$ **1p**

Din egalitatea lui Hermite $\Rightarrow \det[A] = [x]$ **1p**

$[\det A] = [3x - \frac{x}{2} - \frac{1}{3} - \frac{x}{2} - \frac{1}{6} - x - \frac{2}{3} - \frac{3x}{4} - x - \frac{1}{3}] = [-\frac{3x}{4} - \frac{3}{2}]$ **1p**

Rezolvăm cerinţa: $[x] = [-\frac{3x}{4} - \frac{3}{2}] = k, k \in \mathbb{Z}$ **1p**

$$\begin{cases} x = k + \{x\} \\ -\frac{3x}{4} - \frac{3}{2} = k + \{-\frac{3x}{4} - \frac{3}{2}\} \end{cases}$$

$\Rightarrow -\frac{3}{2} = \frac{7}{4}k + \frac{3}{4}\{x\} + \{-\frac{3x}{4} - \frac{3}{2}\} \Rightarrow -6 = 7k + 3\{x\} + 4\{-\frac{3x}{4} - \frac{3}{2}\}$

$\Rightarrow -7k - 6 \in [0,7) \Rightarrow -7k \in [6,13) \Leftrightarrow k \in [-\frac{13}{7}, -\frac{6}{7}) \Rightarrow k = -1$ **2p**

$\Rightarrow [x] = [-\frac{3x}{4} - \frac{3}{2}] = -1$. Atunci:

$$\begin{cases} x \in [-1,0) \\ -1 \le -\frac{3x}{4} - \frac{3}{2} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-1,0) \\ \frac{1}{2} \le -\frac{3x}{4} < \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-1,0) \\ -\frac{2}{3} \ge x > -2 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x \in [1,0) \cap (-2, -\frac{2}{3}] = [-1, -\frac{2}{3}]$ **1p**

Total **7p**

4. Fie $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$, şi $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ astfel încât
$$A^2 + A + aI_3 = O_3 \qquad .$$
Să se demonstreze că A este inversabilă şi să se calculeze $\det(A^{-4} + \frac{1}{a^4}A^4)$.

Cătălin Pană, Râmnicu Vâlcea
Dumitru Acu, Sibiu

Soluţie 4. Avem $A(A + I_3) = -aI_3$. **1p**

sau $A(-\dfrac{1}{a}(A + I_3)) = I_3$.

De aici, rezultă A inversabilă şi $A^{-1} = -\frac{1}{a}(A + I_3)$....................................... **1p**

Tot din condiţia dată avem:

$A^2 = -A - aI_3$

$A^3 = -(a - 1)A + aI_3$

$A^4 = (2a - 1)A + (a - 1)aI_3$ **1p**

Folosind aceste rezultate, găsim:

$A^{-4} = \dfrac{1}{a^4}(A + I_3)^4 = \dfrac{1}{a^4}(A^4 + 4A^3 + 6A^2 + 4A + I_3) =$

$= \dfrac{1}{a^4}(-(2a - 1)A + (a^2 - 3a + 1)I_3)$... **2p**

Rezultă $A^{-4} + \dfrac{1}{a^4}A^4 = \dfrac{2a^2 - 4a + 1}{a^4}I_3$.. **1p**

şi $\det(A^{-4} + \dfrac{1}{a^4}A^4) = \det(\dfrac{2a^2 - 4a + 1}{a^4}I_3) = \left(\dfrac{2a^2 - 4a + 1}{a^4}\right)^3$ **1p**

Total.. **7p**