



Asociațiunea ASTRA – 150 de ani de la înființare (1861-2011)

**CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ  
„GHEORGHE LAZĂR”**

Ediția a XII-a, 25-27 martie 2011

**SIBIU**

Clasa a XI-a

1. Fie  $p \geq 3$  un număr natural. Să se calculeze:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^{p-1} + k^{p-2} + \dots + k}{n^p + k^{p-2} + k^{p-3} + \dots + k}.$$

*GM 12/2010*

2. Fie  $-\infty < a < b < +\infty$  și  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continuă cu  $f(a) = f(b) = 0$ . Să se arate că pentru orice  $k \in (1, \infty)$  există  $\alpha \in (a, b)$  astfel ca  $AP = \frac{b-a}{k}$ , unde  $A(a, 0)$  și  $P(\alpha, f(\alpha))$ .

*Emil C. Popa, Sibiu*

3. Fie  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  cu

$$A = \begin{pmatrix} 3x & x + \frac{1}{3} & x + \frac{2}{3} \\ -1 & -1 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

Notăm cu  $[A]$  matricea care are ca elemente părțile întregi ale elementelor matricei  $A$ . Să se determine valorile lui  $x$  pentru care  $\det[A] = [\det A]$ , unde  $[\det A]$  este partea întreagă a numărului  $\det A$ .

*Liana Agnola, Sibiu*

4. Fie  $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ , și  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$  astfel încât

$$A^2 + A + aI_3 = O_3$$

Să se demonstreze că  $A$  este inversabilă și să se calculeze  $\det(A^{-4} + \frac{1}{a^4}A^4)$ .

*Cătălin Pană, Râmnicu Vâlcea  
Dumitru Acu, Sibiu*

**Notă:** Toate subiectele sunt obligatorii.

Timp de lucru: 3 ore.

**CLASA XI-a**  
**BAREM DE CORECTARE**

1. Fie  $p \geq 3$  un număr natural. Să se calculeze:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^{p-1} + k^{p-2} + \dots + k}{n^p + k^{p-2} + k^{p-3} + \dots + k}.$$

*GM 12/2010*

**Soluție** Notăm  $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{k^{p-1} + k^{p-2} + \dots + k}{n^p + k^{p-2} + k^{p-3} + \dots + k}$ .

Avem  $y_n < x_n < z_n$  ..... **1p**

unde  $y_n = \sum_{k=1}^n \frac{k^{p-1} + k^{p-2} + \dots + k}{n^p + n^{p-2} + n^{p-3} + \dots + n} = \frac{\sum_{k=1}^n (k^{p-1} + k^{p-2} + \dots + k)}{n^p + n^{p-2} + n^{p-3} + \dots + n}$  ..... **2p**

și  $z_n = \sum_{k=1}^n \frac{k^{p-1} + k^{p-2} + \dots + k}{n^p} = \frac{\sum_{k=1}^n (k^{p-1} + k^{p-2} + \dots + k)}{n^p}$  ..... **2p**

Utilizând Stolz-Cesaro, găsim  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \frac{1}{p}$  ..... **1p**

Pe baza criteriului cleștelui, deducem că  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{p}$  ..... **1p**

Observație: Problema este valabilă și pentru  $p = 2$ .

**Total** ..... **7p**

2. Fie  $-\infty < a < b < +\infty$  și  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continuă cu  $f(a) = f(b) = 0$ . Să se arate că pentru orice  $k \in (1, \infty)$  există  $\alpha \in (a, b)$  astfel ca  $AP = \frac{b-a}{k}$ , unde  $A(a, 0)$  și  $P(\alpha, f(\alpha))$ .

*Emil C. Popa, Sibiu*

**Soluție** Fie  $\varphi(x) = (x-a)^2 + f^2(x) - \frac{(b-a)^2}{k^2}$ ,

$\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continuă..... **2p**

Avem:

$\varphi(a) = -\frac{(b-a)^2}{k^2} < 0$ ..... **1p**

$\varphi(b) = (b-a)^2 - \frac{(b-a)^2}{k^2} = (1 - \frac{1}{k^2})(b-a)^2 > 0$ ..... **1p**

Rezultă că există  $\alpha \in (a, b)$  cu  $\varphi(\alpha) = 0$ ..... **1p**

și deci  $(\alpha - a)^2 + f^2(\alpha) = \frac{(b-a)^2}{k^2}$ ..... **1p**

adică  $AP = \frac{b-a}{k}$ ..... **1p**

**Total**..... **7p**

3. Fie  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  cu

$$A = \begin{pmatrix} 3x & x + \frac{1}{3} & x + \frac{2}{3} \\ -1 & -1 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

Notăm cu  $[A]$  matricea care are ca elemente părțile întregi ale elementelor matricei  $A$ .  
Să se determine valorile lui  $x$  pentru care  $\det[A] = [\det A]$ , unde  $[\det A]$  este partea întreagă a numărului  $\det A$ .

*Liana Agnola, Sibiu*

**Soluție**  $\det[A] = \begin{vmatrix} [3x] & [x + \frac{1}{3}] & [x + \frac{2}{3}] \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = [3x] - [x + \frac{2}{3}] - [x + \frac{1}{3}] \dots\dots\dots \mathbf{1p}$

Din egalitatea lui Hermite  $\Rightarrow \det[A] = [x] \dots\dots\dots \mathbf{1p}$

$[\det A] = [3x - \frac{x}{2} - \frac{1}{3} - \frac{x}{2} - \frac{1}{6} - x - \frac{2}{3} - \frac{3x}{4} - x - \frac{1}{3}] = [-\frac{3x}{4} - \frac{3}{2}] \dots\dots\dots \mathbf{1p}$

Rezolvăm cerința:  $[x] = [-\frac{3x}{4} - \frac{3}{2}] = k, k \in \mathbb{Z} \dots\dots\dots \mathbf{1p}$

$$\begin{cases} x = k + \{x\} \\ -\frac{3x}{4} - \frac{3}{2} = k + \{-\frac{3x}{4} - \frac{3}{2}\} \end{cases}$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{2} = \frac{7}{4}k + \frac{3}{4}\{x\} + \{-\frac{3x}{4} - \frac{3}{2}\} \Rightarrow -6 = 7k + 3\{x\} + 4\{-\frac{3x}{4} - \frac{3}{2}\}$$

$\Rightarrow -7k - 6 \in [0, 7) \Rightarrow -7k \in [6, 13) \Leftrightarrow k \in [-\frac{13}{7}, -\frac{6}{7}) \Rightarrow k = -1 \dots\dots\dots \mathbf{2p}$

$\Rightarrow [x] = [-\frac{3x}{4} - \frac{3}{2}] = -1$ . Atunci:

$$\begin{cases} x \in [-1, 0) \\ -1 \leq -\frac{3x}{4} - \frac{3}{2} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-1, 0) \\ \frac{1}{2} \leq -\frac{3x}{4} < \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-1, 0) \\ -\frac{2}{3} \geq x > -2 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x \in [1, 0) \cap (-2, -\frac{2}{3}] = [-1, -\frac{2}{3}] \dots\dots\dots \mathbf{1p}$

**Total**  $\dots\dots\dots \mathbf{7p}$

4. Fie  $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ , și  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$  astfel încât

$$A^2 + A + aI_3 = O_3$$

Să se demonstreze că  $A$  este inversabilă și să se calculeze  $\det(A^{-4} + \frac{1}{a^4}A^4)$ .

*Cătălin Pană, Râmnicu Vâlcea*  
*Dumitru Acu, Sibiu*

**Soluție 4.** Avem  $A(A + I_3) = -aI_3$ . ..... **1p**

sau  $A(-\frac{1}{a}(A + I_3)) = I_3$ .

De aici, rezultă  $A$  inversabilă și  $A^{-1} = -\frac{1}{a}(A + I_3)$ ..... **1p**

Tot din condiția dată avem:

$$A^2 = -A - aI_3$$

$$A^3 = -(a - 1)A + aI_3$$

$$A^4 = (2a - 1)A + (a - 1)aI_3 \dots\dots\dots \mathbf{1p}$$

Folosind aceste rezultate, găsim:

$$\begin{aligned} A^{-4} &= \frac{1}{a^4}(A + I_3)^4 = \frac{1}{a^4}(A^4 + 4A^3 + 6A^2 + 4A + I_3) = \\ &= \frac{1}{a^4}(-(2a - 1)A + (a^2 - 3a + 1)I_3) \dots\dots\dots \mathbf{2p} \end{aligned}$$

Rezultă  $A^{-4} + \frac{1}{a^4}A^4 = \frac{2a^2 - 4a + 1}{a^4}I_3$ ..... **1p**

și  $\det(A^{-4} + \frac{1}{a^4}A^4) = \det(\frac{2a^2 - 4a + 1}{a^4}I_3) = \left(\frac{2a^2 - 4a + 1}{a^4}\right)^3$  ..... **1p**

**Total** ..... **7p**