Asociațiunea ASTRA – 150 de ani de la înființare (1861-2011)

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ „GHEORGHE LAZĂR”

Ediția a XII-a, 25-27 martie 2011

SIBIU

CLASA X-a

1. Să se rezolve ecuaţia:

$$x^{\lg(2x)} = 5 \cdot 2^{1-\log_5 x},\ x \in (\tfrac{1}{10}, \infty)$$

G.M. 12/2010

2. Dacă $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x + y + z = 0$, iar $a \in (0, \infty)$, atunci

$$(a^x + a^y + a^z)(a^{-x} + a^{-y} + a^{-z}) \leq (a^{2x} + a^{2y} + a^{2z})^2$$

Emil C. Popa, Sibiu

3. Fie $A_1, A_2, ...A_n, n \geq 5$, un poligon convex.
Demonstraţi că există cel puţin $\frac{1}{4}\left[n^2 - 6n + 8 + \frac{1-(-1)^n}{2}\right]$ triplete de diagonalele din poligon aşa încât cu segmentele fiecărui triplet să se poată forma un triunghi.

Dumitru Acu, Sibiu

4. Fie $a \in (1, 3)$ şi $b \in (-1, 1)$, astfel încât $log_{\frac{1}{2}}\frac{3-a}{2}log_{\frac{1}{2}}\frac{1+b}{2} = 1.$

Să se determine valoarea minimă pe care o poate lua expresia $E = ab + a - 3b$.

Doriana Dorca, Sibiu

NOTĂ: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru 3 ore.

CLASA X-a
BAREM DE CORECTARE

1. Să se rezolve ecuaţia:

$$x^{\lg(2x)} = 5 \cdot 2^{1-\log_5 x},\ x \in (\tfrac{1}{10}, \infty)$$

G.M. 12/2010

Soluţie Prin logaritmarea în baza 10 a ecuaţiei date, se obţine:

$(\lg 2 + \lg x)\lg x = \lg 5 + (1 - \lg_5 x)\lg 2$ **1p**

Punem $\lg x = t$ şi avem:

$t^2 + (\lg 2)t + \lg 2 \lg_5 x - 1 = 0$ **1p**

Cum $\log_5 x = \dfrac{\lg x}{\lg 5}$, obţinem:

$(\lg 5)t^2 + \lg 2(1 + \lg 5)t - \lg 5 = 0$

sau

$(\lg 5)t^2 + (1 - \lg^2 5)t - \lg 5 = 0$ **1p**

Cum $\Delta = (1 - \lg^2 5)^2 + 4\lg^2 5 = (1 + \lg^2 5)^2$

rezultă

$t_1 = \dfrac{\lg^2 5 - 1 + 1 + \lg^2 5}{2\lg 5} = \lg 5$ şi $t_2 = \dfrac{\lg^2 5 - 1 - 1 - \lg^2 5}{2\lg 5} = \dfrac{1}{\lg 5}$ **2p**

În final, avem: $\lg x = \lg 5$, de unde $x_1 = 5 > \dfrac{1}{10}$

şi $\lg x = -\dfrac{1}{\lg 5}$ de unde $x_1 = 10^{-\frac{1}{\lg 5}} < \dfrac{1}{10} = 10^{-1}$.

Soluţia este $x = 5$ **2p**

TOTAL **7p**

2. Dacă $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x + y + z = 0$, iar $a \in (0, \infty)$, atunci

$$(a^x + a^y + a^z)(a^{-x} + a^{-y} + a^{-z}) \leq (a^{2x} + a^{2y} + a^{2z})^2$$

prof.univ.dr. Emil C. Popa, Sibiu

Soluţie Avem:

$a^{-x} + a^{-y} + a^{-z} = \dfrac{1}{a^x} + \dfrac{1}{a^y} + \dfrac{1}{a^z} = \dfrac{a^y \cdot a^z + a^z \cdot a^x + a^x \cdot a^y}{a^{x+y+z}}$ **1p**

$= a^y \cdot a^z + a^z \cdot a^x + a^x \cdot a^y \leq$ **1p**

$\leq \dfrac{a^{2y} + a^{2z}}{2} + \dfrac{a^{2z} + a^{2x}}{2} + \dfrac{a^{2x} + a^{2y}}{2} = a^{2x} + a^{2y} + a^{2z}$ **1p**

Pe de altă parte,

$3(a^{2x} + a^{2y} + a^{2z}) \geq (a^x + a^y + a^z)^2 \geq 3(a^x + a^y + a^z)$

de unde

$a^x + a^y + a^z \leq a^{2x} + a^{2y} + a^{2z}$ **3p**

În final obţinem:

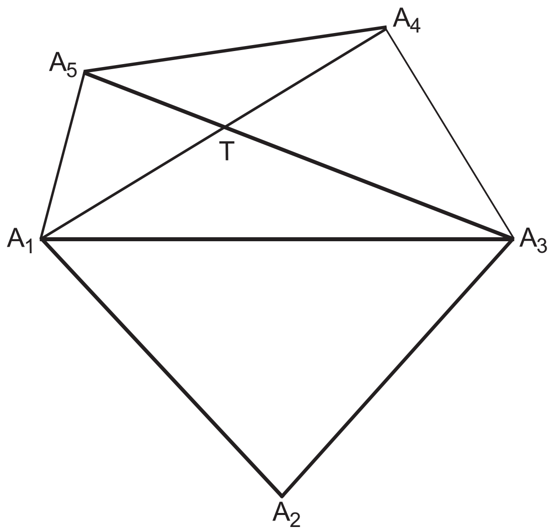
$(a^x + a^y + a^z)(a^{-x} + a^{-y} + a^{-z}) \leq (a^{2x} + a^{2y} + a^{2z})^2$ **1p**

TOTAL **7p**

3. Fie $A_1, A_2, ...A_n, n \geq 5$, un poligon convex.
Demonstraţi că există cel puţin un număr $\frac{1}{4}\left[n^2 - 6n + 8 + \frac{1-(-1)^n}{2}\right]$ triplete de diagonalele din poligon aşa încât cu segmentele fiecărui triplet să se poată forma un triunghi.

Dumitru Acu, Sibiu

Soluţie



Cazul $n = 5$

Fie A_1A_3 diagonala cea mai mare din pentagon.

Avem: $A_1A_3 < A_1T + A_3T < A_1A_4 + A_3A_5$;

$A_1A_4 < A_1A_3 < A_1A_3 + A_3A_5$

şi $A_3A_5 < A_1A_3 < A_1A_3 + A_1A_4$,

ceea ce ne arată că folosind diagonalele A_1A_3, A_1A_4, A_3A_5 se poate forma un triunghi

$(\frac{1}{4}(25 - 30 + 8 + 1) = 1)$. **1p**

Acest caz particular ne sugerează metoda de rezolvare în general.

Cazul $n \geq 5$. Fie $3 \geq i \leq n-2$ şi A_1A_i diagonalele de lungime maximă din poligonul convex $A_1A_2...A_n$ şi care au de o parte a ei $i-2$ vârfuri $A_2A_3, ..., A_{i-1}$ şi de cealaltă parte $n-i$ vârfuri $A_{i+1}, A_{i+2}, ...A_n$ **1p**

Acum, de partea diagonalei A_1A_i cu vârfurile $A_2A_3, ..., A_{i-1}$ avem: diagonala A_2A_i este intersectată de $(i-3)$ diagonale ce pleacă din A_1; diagonala A_3A_i este intersectată de $i-4$ diagonale ce pleacă din A_1; ...; diagonalele $A_{i-2}A_i$ este intersectată numai de diagonala A_1A_{i-1}

Aşadar, obţinem: $(i-3) + (i-4) + ... + 2 + 1 = \frac{(i-3)(i-2)}{2}$ triplete de diagonale analoage cu cel de la cazul $n = 5$.

Rezultă că s-au obţinut, $\dfrac{(i-3)(i-2)}{2}$

triplete de diagonale din care se pot forma triunghiuri. **1p**

Raţionând în mod analog, deducem că de partea diagonalei A_1A_i unde sunt situate vârfurile $A_{i+1}, A_{i+2}, ..., A_n$ putem forma:

$(n-i-1)+(n-i-2)+...+(2-i)=\dfrac{(n-i-1)(n-i)}{2}$ triplete de diagonale cu A_1A_i din care se pot forma tringhiuri. **1p**

În total putem forma

$$f(i)=\frac{(n-i-1)(n-i)}{2}+\frac{(i-3)(i-2)}{2}=\frac{1}{2}[2i^2-2(n+2)i+n^2-n+6], i=\overline{3,n-1}.$$

Trebuie să găsim minumul trinomului de gradul II $f(i)$.

Acest minim se obţine pentru $i=\dfrac{n+2}{2}$. **1p**

Cum i trebuie să fie întreg suntem nevoiţi să considerăm două cazuri, după paritatea lui n .

Dacă $n=2k$, $k\geq 3$,

atunci $i=k+1$ şi (1) $\min f(i)=f(k+1)=k^2-3k+2=\dfrac{1}{4}(n^2-6n+8)$ **1p**

Dacă $n=2k+1$, $k\geq 2$, avem $i=k+\dfrac{1}{2}\in\mathbb{N}$.

Rezultă că min f pe $i\in\{3,4,...,2k\}$ se obţine pentru $i=k+1$ şi $i=k+2$.

Rezultă (2) $\min f(i)=f(k+1)=f(k+2)=(k-1)^2=\dfrac{1}{4}(n^2-6n+9)$. **1p**

Formele (1) şi (2) se pot .... sub forma din enunţ.

TOTAL **7p**

4. Fie $a \in (1, 3)$ şi $b \in (-1, 1)$, astfel încât $log_{\frac{1}{2}} \dfrac{3-a}{2} log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1+b}{2} = 1$. Să se determine valoarea minimă pe care o poate lua expresia $E = ab + a - 3b$.

prof. Doriana Dorca, Sibiu

Soluţie
Deoarece $a \in (1, 3)$, $b \in (-1, 1)$

avem

$\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{3-a}{2} > 0$ şi $\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1+b}{2} > 0$ **1p**

Aplicând ipoteza şi inegalitatea mediilor, rezultă că:

$1 = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{3-a}{2} \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1+b}{2}} \leq \dfrac{\log_{\frac{1}{2}} \frac{3-a}{2} + \log_{\frac{1}{2}} \frac{1+b}{2}}{2}$ **2p**

de unde

$2 \leq \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{3-a}{2} \dfrac{1+b}{2}$, ... **1p**

adică

$\dfrac{(3-a)(1+b)}{4} \leq \dfrac{1}{4}$, ... **1p**

$ab + a - 3b \geq 2$, ... **1p**

Valoarea minimă a expresiei E, este egală cu 2, atinsă pentru $a = 2, b = 0$ **1p**

TOTAL **7p**