Societatea de Ştiinţe Matematice din Romania

Olimpiada Naţională de Matematică

Al cincilea test de selecţie pentru juniori
21 mai 2010

Problema 1. Fie p un număr prim, $p > 5$. Să se determine numerele naturale nenule x cu proprietatea că $5p + x$ divide $5p^n + x^n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

Problema 2. Fie ABC un triunghi şi D, E, F mijloacele laturilor BC, CA, AB respectiv. Să se arate că $\angle DAC = \angle ABE$ dacă şi numai dacă $\angle AFC = \angle BDA$.

Problema 3. Fie a, b, c numere reale cu $ab + bc + ca = 1$. Să se arate că:

$$\frac{(a+b)^2+1}{c^2+2} + \frac{(b+c)^2+1}{a^2+2} + \frac{(c+a)^2+1}{b^2+2} \geq 3.$$

Problema 4. O tablă de şah 8×8 este formată din 64 de pătrate unitate. În unele dintre pătratele unitate ale tablei se duc diagonale astfel încât oricare două diagonale să nu aibă puncte comune. Care este numărul maxim de diagonale ce pot fi trasate?

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este punctată de la 0 la 7 puncte.

Societatea de Ştiinţe Matematice din Romania

Olimpiada Naţională de Matematică

Al patrulea test de selecţie pentru juniori
20 aprilie 2010

Problema 1. Să se determine numerele prime p, q, r cu proprietatea că:

$$p(p-7)+q(q-7)=r(r-7).$$

Problema 2. Să se arate că:

a) Există un şir de numere naturale nenule $a_1, a_2, a_3, \ldots$, unic determinat, astfel încât:

$$n=\sum_{d|n} a_d, \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N}^*.$$

b) Există un şir de numere naturale nenule $b_1, b_2, b_3, \ldots$, unic determinat, astfel încât:

$$n=\prod_{d|n} b_d, \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N}^*.$$

Notă. Suma de la a), respectiv produsul de la b), se fac după toţi divizorii naturali d ai numărului n, inclusiv 1 şi n.

Problema 3. Fie ABC un triunghi înscris in cercul (O). Fie I centrul cercului inscris în triunghi şi D punctul de contact al cercului înscris cu latura BC. Fie M cel de-al doilea punct de intersecţie a bisectoarei AI cu cercul (O) şi fie P punctul în care dreapta DM retaie cercul (O). Să se arate că $\sphericalangle API = 90^\circ$.

Problema 4. În plan se consideră 51 de puncte de coordonate întregi, astfel încât distanţele între orice două puncte să fie numere naturale. Să se arate că cel puţin 49% dintre distanţe sunt pare.

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este punctată de la 0 la 7 puncte.