Societatea de Ştiinţe Matematice din Romania

Olimpiada Naţională de Matematică

Al patrulea test de selecţie pentru OIM
Cabana Gâlma, 18 mai 2010

Problema 1. Fie P un punct în plan şi γ un cerc care nu trece prin punctul P. Două drepte variabile distincte, d şi d', care trec prin punctul P, intersectează cercul γ în punctele X şi Y, respectiv X' şi Y'. Fie M, respectiv N, punctul diametral opus lui P în cercul PXX', respectiv PYY'. Arătaţi că dreapta MN trece printr-un punct fix.

Problema 2. Fie ABC un triunghi scalen. Tangentele la cercul celor nouă puncte al triunghiului ABC, duse prin piciorul înălţimii din A, respectiv mijlocul laturii BC, se intersectează în punctul A'; punctele B' şi C' sunt definite în mod analog. Arătaţi că dreptele AA', BB' şi CC' sunt concurente.

Problema 3. Fie $\mathcal{L}$ o mulţime finită de drepte în plan, situate în poziţie generală: oricare două drepte din $\mathcal{L}$ nu sunt paralele şi oricare trei nu sunt concurente. Considerăm discul deschis înscris în fiecare triunghi determinat de câte trei drepte din $\mathcal{L}$. Determinaţi numărul de astfel de discuri care nu sunt intersectate de către nicio dreaptă din $\mathcal{L}$, în funcţie de $|\mathcal{L}|$.

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este punctată de la 0 la 7 puncte.

Societatea de Ştiinţe Matematice din Romania

Olimpiada Naţională de Matematică

Al cincilea test de selecţie pentru OIM
Cabana Gâlma, 20 mai 2010

Problema 1. Fiecare punct al planului este colorat cu una din două culori. Dat fiind un număr impar $n \geq 3$, arătaţi că există două triunghiuri asemenea, care au raportul de asemănare n, astfel încât vârfurile fiecărui triunghi să aibă aceeaşi culoare.

Problema 2. Fie d o dreaptă şi γ, γ' două cercuri în plan. Dreapta d intersectează cercul γ în punctele A şi B, iar cercul γ' în punctele A' şi B'. Tangentele în punctele A şi B la cercul γ se intersectează în punctul C, iar tangentele în punctele A' şi B' la cercul γ' se intersectează în punctul C'. Prin punctul de intersecţie a dreptelor d şi CC', considerăm o dreaptă variabilă δ. Fie X unul dintre punctele de intersecţie a dreptei δ cu cercul γ şi X' unul dintre punctele de intersecţie a dreptei δ cu cercul γ'. Arătaţi că punctul de intersecţie a dreptelor CX şi $C'X'$ se află pe un cerc fix.

Problema 3. Fie p un număr prim, $n_1 > n_2 > \cdots > n_p$ numere întregi strict pozitive şi d cel mai mare divizor comun al numerelor $n_1, n_2, \cdots, n_p$. Arătaţi că polinomul

$$\frac{X^{n_1} + X^{n_2} + \cdots + X^{n_p} - p}{X^d - 1}$$

este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$.

Timp de lucru 4 ore şi 30 de minute
Fiecare problemă este punctată de la 0 la 7 puncte.

Societatea de Ştiinţe Matematice din Romania

Olimpiada Naţională de Matematică

Al şaselea test de selecţie pentru OIM
Cabana Gâlma, 21 mai 2010

Problema 1. Un polinom neconstant f, cu coeficienţi întregi, are următoarea proprietate: oricare ar fi numărul prim p, există un număr prim q şi un număr întreg strict pozitiv m, astfel încât $f(p) = q^m$. Arătaţi că $f = X^n$, unde n este un număr întreg strict pozitiv.

Problema 2. Fie ABC un triunghi scalen, I centrul cercului său înscris şi A_1, B_1, C_1 punctele de contact ale cercurilor exînscrise cu laturile BC, CA, respectiv AB. Arătaţi că cercurile circumscrise triunghiurilor AIA_1, BIB_1 şi CIC_1 au un punct comun diferit de I.

Problema 3. Fie n un număr întreg strict pozitiv. Dacă S este o mulţime finită de vectori în plan, notăm cu $N(S)$ numărul de submulţimi $\{\mathbf{v}, \mathbf{v}'\} \subseteq S$, ale căror elemente îndeplinesc condiţia

$$4\,(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}') + (|\mathbf{v}|^2 - 1)(|\mathbf{v}'|^2 - 1) < 0.$$

Determinaţi valoarea maximă a lui $N(S)$, când S parcurge familia mulţimilor de n vectori în plan.

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este punctată de la 0 la 7 puncte.