



GRUP ȘCOLAR OLTCHIM RM. VÂLCEA
CONCURSUL NAȚIONAL **TEHNICI MATEMATICE**
EDIȚIA A VIII – A / 25 – 27 MARTIE 2011

SUBIECTE CLASA A IX – A

Subiectul I (30p)

a) Aflați numerele întregi x și y știind că $x(y-2) = 7$.

b) O persoană depune la bancă suma de 10.000 lei cu o dobândă anuală de 25%. Dacă persoana nu își ridică dobânda, aceasta se adaugă sumei inițiale și dobânda pe anul următor se aplică sumei totale. Aflați ce dobândă va avea persoana după 5 ani, dacă până atunci nu efectuează nici o retragere de bani.

c) Reprezentați grafic funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 1} + x$.

Subiectul II (30p)

Dacă \vec{a} și \vec{b} sunt doi vectori necoliniari, iar $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ se exprimă ca: $\vec{u} = 3\vec{a} + 5\vec{b}$, $\vec{v} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$, $\vec{w} = \vec{a} + 3\vec{b}$, atunci:

a) arătați că dacă numerele x și y îndeplinesc condiția $x\vec{a} = y\vec{b}$, avem $x = y = 0$.

b) arătați că \vec{w} se poate scrie în funcție de \vec{u} și \vec{v} .

c) arătați că \vec{a} și \vec{b} se pot scrie în funcție de \vec{u} și \vec{v} .

Subiectul III (30p)

a) Se dau funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 0 \\ 1-x, & x \in (0, 3) \\ -2, & x \geq 3 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 3, & x \leq 1 \\ 2x+a, & x > 1 \end{cases}$.

Determinați valorile lui $a \in \mathbb{R}$ astfel încât funcțiile $f \circ g$ și $g \circ f$ să fie funcții constante.

b) Pentru cea mai mică valoare a lui a să se reprezinte graficele funcțiilor f și g .

c) Să se calculeze suma: $S = \left[1 + \sqrt{2}\right] + \left[\frac{2 + \sqrt{3}}{2}\right] + \left[\frac{3 + \sqrt{4}}{3}\right] + \dots + \left[\frac{2011 + \sqrt{2012}}{2011}\right]$.

Din oficiu 10p

Timp de lucru 2 ore

Toate subiectele sunt obligatorii.

Probleme propuse de:

Prof. Smeureanu Florin Dorian

Prof. Cotoarbă Cristian

Prof. Vâlceanu Radu

Prof. Stătie Silviu

Prof. Modrea Speranța

Prof. Stoenescu Dorel



GRUP ȘCOLAR OLTCHIM RM. VÂLCEA
CONCURSUL NAȚIONAL **TEHNICI MATEMATICE**
EDIȚIA A VIII – A / 25 – 27 MARTIE 2011

SUBIECTE CLASA A X – A

Subiectul I (30p)

a) Demonstrați că $|x - 2009| + |x - 2010| + |x - 2011| + |x - 2012| \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}$.

b) Rezolvați în \mathbb{R} ecuația : $2^{\log_6(x+\frac{9}{x})} = \frac{8x - 9 - x^2}{x}$.

Subiectul II (30p)

Să se arate că nu există funcții $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care să verifice relația $f^2(x^2 - 2x) - 6 \cdot f(2x - 3) + x^2 + 1 = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Subiectul III (30p)

a) Fie $z = \frac{1 - 2i}{1 + i}$. Calculați $\operatorname{Re}(z)$, $\operatorname{Im}(z)$ și $|z|$.

b) Determinați ecuația de gradul II ce admite ca rădăcină numărul complex $z = 2 + i$.

c) Fie z_1 și z_2 rădăcinile ecuației de la punctul b). Calculați $z_1^4 + z_2^4$.

Din oficiu 10p.

Timp de lucru 2 ore

Toate subiectele sunt obligatorii.

Probleme propuse de:

Prof. Smeureanu Florin Dorian

Prof. Cotoarbă Cristian

Prof. Constantinescu Dragoș

Prof. Buican Cristian

Prof. Stoenescu Dorel

Inf. Păun Cătălin



GRUP ȘCOLAR OLTCHIM RM. VÂLCEA
CONCURSUL NAȚIONAL **TEHNICI MATEMATICE**
EDIȚIA A VIII – A / 25 – 27 MARTIE 2011

SUBIECTE CLASA A XI – A

Subiectul I (30p)

- a) Să se determine $x \in \mathbf{R}$ astfel încât punctele $A(1,1), B(3^x, 3^{x+1} - 3), C(3^{x+1} - 3, 3^x)$ să fie coliniare.
- b) Să se determine aria triunghiului ABC știind că $A(m, m^2), B(n, n^2), C(p, p^2)$ și m, n, p sunt numere naturale consecutive.
- c) Fie $A = (a_{ij}) \in M_3(\mathbf{Z})$ o matrice simetrică ($a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j = \overline{1,3}$). Să se arate că dacă elementele de pe diagonala principală a matricei A sunt egale, iar suma elementelor fiecărei coloane este egală cu λ , atunci $4\lambda \cdot \det(A)$ este pătrat perfect.

Subiectul II (30p)

Se consideră mulțimea $M = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} \frac{e^x + e^{-x}}{2} & 0 & \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{e^x - e^{-x}}{2} & 0 & \frac{e^x + e^{-x}}{2} \end{pmatrix} \mid x \in \mathbf{R} \right\}$.

- a) Să se calculeze $\det(A(x))$, $x \in \mathbf{R}$.
- b) Să se arate că dacă $A(x), A(y) \in M$ atunci $A(x) \cdot A(y) \in M$.
- c) Să se determine suma $A(1) \cdot A(2) \cdot \dots \cdot A(2011)$.

Subiectul III (30p)

- a) Se consideră funcția $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c, & \text{dacă } x \in [-1, 0) \\ \ln(x^2 + 1), & \text{dacă } x \in [0, 1] \end{cases}$, $a, b, c \in \mathbf{R}$. Să se determine $a, b, c \in \mathbf{R}$

astfel încât funcția f să fie continuă în $x_0 = 0$ și să existe $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}$.

b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{2x+1}}{x}$.

- c) Fie funcția $f: D \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{ax^2 + bx + 2}{|x-4|}$. Să se determine $a, b \in \mathbf{R}$ astfel încât asimptota funcției f către $-\infty$ să fie dreapta de ecuație $y = 3x - 1$.

Probleme propuse de:

Prof. Bîrzescu Cătălin

Prof. Smeureanu Florin Dorian

Prof. Neagu Dumitru

Din oficiu 10p.

Timp de lucru 2 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii.



GRUP ȘCOLAR OLTCHIM RM. VÂLCEA
CONCURSUL NAȚIONAL **TEHNICI MATEMATICE**
EDIȚIA A VIII – A / 25 – 27 MARTIE 2011

SUBIECTE CLASA A XII – A

Subiectul I (30p)

1. Ordonăți crescător numerele $a = -\sqrt[3]{64}$, $b = \log_2 \log_2 \frac{1}{32}$ și $c = C_2^1 - A_5^1$.
2. Determinați valorile parametrului real m știind că parabola asociată funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + mx - 2m$ se află situată deasupra axei Ox .
3. Rezolvați în \mathbb{R} ecuația $\log_3(\sqrt{2x^2 + x - 1}) = 1$.
4. Determinați al zecelea termen al progresiei aritmetice definită prin: $2, n, 3n - 8, \dots$
5. Determinați coordonatele simetricului punctului $A(-3; 2)$ față de mijlocul segmentului determinat de punctele $B(1; -4)$ și $C(-3; 2)$.
6. Să se arate că $\sin 40^\circ \cdot \sin 140^\circ = \cos^2 130^\circ$.

Subiectul II (30p)

1. Se consideră mulțimea M a tuturor matricelor pătratice de ordinul 2 având elemente numere reale și care au proprietatea că suma elementelor aflate pe fiecare linie, respectiv coloană este egală cu 1.

a) Să se arate că dacă $A \in M$ atunci $A \cdot A' \in M$, unde A' este transpusă matricei A .

b) Să se arate că dacă $A \in M$ și $\det A = 1$ atunci $A = I_2$, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Să se determine matricile din mulțimea M care își au inversele tot în M .

2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 2aX^2 + 2(a^2 - 2)X - 1 \in \mathbb{R}[X]$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$.

a) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ știind că 1 este rădăcină a polinomului f .

b) Să se arate că expresia $\frac{x_1}{x_2 x_3} + \frac{x_2}{x_3 x_1} + \frac{x_3}{x_1 x_2}$ nu depinde de a .

c) Să se determine $a \in \mathbb{N}$ și să se rezolve ecuația $f(x) = 0$, știind că f admite o rădăcină întregă.

Subiectul III (30p)

1. Se consideră funcția $f: (0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1, & x \in (0; 1) \\ 1 + \ln x, & x \geq 1 \end{cases}$.

a) Studiați continuitatea funcției f în punctul $x_0 = 1$.

b) Arătați că $f(x) \geq \frac{3}{4}$ oricare ar fi $x > 0$.



GRUP ȘCOLAR OLTCHIM RM. VÂLCEA
CONCURSUL NAȚIONAL **TEHNICI MATEMATICE**
EDIȚIA A VIII – A / 25 – 27 MARTIE 2011

c) Calculați $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(e^x) - 1}{x}$.

2. Se consideră funcțiile $f, g : (0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definite prin $f(x) = x - \ln x$ și $g(x) = \frac{x-1}{x}$, oricare ar fi $x > 0$

a) Arătați că $\int g(x) dx = f(x) + C$.

b) Determinați aria suprafeței mărginite de graficul funcției $h : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = x \cdot f(e^x)$, axa Ox și dreptele $x=1$ și $x=2$.

c) Demonstrați că $\int_1^e f^{2010}(x) \cdot g(x) dx = \frac{(e-1)^{2011} - 1}{2011}$.

Probleme propuse de:

Prof. Smeureanu Florin Dorian

Din oficiu 10p.

Timp de lucru 2 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii.