



GRUP ȘCOLAR OLTCHIM RM. VÂLCEA  
 CONCURSUL NAȚIONAL **TEHNICI MATEMATICE**  
 EDIȚIA A VIII – A / 25 – 27 MARTIE 2011

Barem de corectare – clasa a IX-a

Barem de corectare Clasa a IX-a

Subiectul I (30p)

a)  $x \cdot (y-2) = 7 \Rightarrow \begin{cases} x \cdot (y-2) = 1 \cdot 7 \\ x \cdot (y-2) = (-1) \cdot (-7) \end{cases} \dots \dots \dots 3p$

$x \cdot (y-2) = 1 \cdot 7 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y-2=7 \end{cases}$  sau  $\begin{cases} x=7 \\ y-2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=9 \end{cases}$  sau  $\begin{cases} x=7 \\ y=3 \end{cases} \dots \dots \dots 3p$

$x \cdot (y-2) = (-1) \cdot (-7) \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y-2=-7 \end{cases}$  sau  $\begin{cases} x=-7 \\ y-2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-5 \end{cases}$  sau  $\begin{cases} x=-7 \\ y=1 \end{cases} \dots \dots \dots 4p$

b)  $S_m = \left(\frac{1}{4}\right)^m \cdot S$   
 Cum:  $S = 10.000$  și  $m=5 \Rightarrow S_5 = \left(\frac{1}{4}\right)^5 \cdot 10000 \dots \dots \dots 10p$

c)  $f(x) = |x+1| + x \dots \dots \dots 2p$   
 $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \geq -1 \\ -1, & x < -1 \end{cases} \dots \dots \dots 4p$

Reprezentarea grafică  $\dots \dots \dots 4p$

Subiectul II (30p)

a)  $x=y=0 \dots \dots \dots 10p$

b)  $\vec{w} = x \cdot \vec{u} + y \cdot \vec{v} = x \cdot (3\vec{a} + 5\vec{b}) + y \cdot (2\vec{a} - 3\vec{b}) = \dots \dots \dots 3p$   
 $= (3x+2y) \cdot \vec{a} + (5x-3y) \cdot \vec{b}$  și  $\vec{w} = \vec{a} + 3\vec{b} \dots \dots \dots 3p$   
 $\Rightarrow x = \frac{9}{19}; y = -\frac{4}{19} \Rightarrow \vec{w} = \frac{9}{19} \cdot \vec{u} - \frac{4}{19} \cdot \vec{v} \dots \dots \dots 4p$

c) analog b); dacă  $\vec{a} = x\vec{u} + y\vec{v} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow x = \frac{3}{19}$  și  $y = \frac{5}{19} \Rightarrow \vec{a} = \frac{3}{19} \cdot \vec{u} + \frac{5}{19} \cdot \vec{v} \dots \dots \dots 5p$   
 La fel deducem:  $\vec{b} = \frac{2}{19} \cdot \vec{u} - \frac{3}{19} \cdot \vec{v} \dots \dots \dots 5p$

Subiectul III (30p)

a)  $f \circ g = \begin{cases} 4, & x \leq 0 \\ -2, & x \in (0, 1) \\ -2x - a + 1, & x \in (1, 3) \\ 2, & x \geq 3 \end{cases}; g \circ f = \begin{cases} 3, & x \leq 1 \\ -2x + 2 + a, & x \in (1, 3) \\ -2, & x \geq 3 \end{cases}$   
 $a \geq 1 \dots \dots \dots 10p$

b) Reprezentarea grafică  $f \dots \dots \dots 5p$   
 $g \dots \dots \dots 5p$

c) Avem inegalitatea:  
 $1 \leq \frac{m + \sqrt{m+1}}{m} < 2$ , ( $\forall$ )  $m \in \mathbb{N}$  și  $m \geq 2 \dots \dots \dots 4p$

$\Rightarrow \left[ \frac{1+\sqrt{2}}{1} \right] + \left[ \frac{2+\sqrt{3}}{2} \right] + \dots + \left[ \frac{2010 + \sqrt{2011}}{2010} \right] = 2010 \dots \dots \dots 6p.$



GRUP ȘCOLAR OLTCHIM RM. VÂLCEA  
CONCURSUL NAȚIONAL **TEHNICI MATEMATICE**  
EDIȚIA A VIII – A / 25 – 27 MARTIE 2011

Barem de corectare – clasa a X-a

Barem de corectare

Clasa a X-a

Subiectul I (30p)

- a) Falsăm inegalitatea:  $|a| + |b| \geq |a - b|$ , ( $\forall$ )  $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow (|x - 2009| + |x - 2010|) + (|x - 2011| + |x - 2012|) \geq |4| + |4| = 2 \dots 15p$
- b) Ecuația este echivalentă cu:  $2^{\log_6(x + \frac{9}{x})} = 8 - \frac{9}{x} - x \Leftrightarrow$   
 $2^{\log_6(x + \frac{9}{x})} = 8 - (x + \frac{9}{x}) \dots 15p$
- c.e.  $x + \frac{9}{x} > 0 \Rightarrow x > 0$ . Notăm:  $x + \frac{9}{x} = t > 0 \Rightarrow 2^{\log_6 t} = 8 - t \Rightarrow$   
 $\Rightarrow t = 6$  - este soluție unică  $\Rightarrow x = 3$

Subiectul II (30p)

- Luăm  $x = 3 \Rightarrow f^2(3) - 6 \cdot f(3) + 10 = 0$  (1)  $\dots 15p$   
Dar:  $f^2(3) - 6 \cdot f(3) + 10 = (f(3) - 3)^2 + 4 \geq 4$  (2)  $\dots 15p$   
Deci (1) și (2)  $\Rightarrow$  contradicție  $\Rightarrow (3) \neq$

Subiectul III (30p)

- a)  $z = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i \Rightarrow \operatorname{Re}(z) = -\frac{1}{2}$ ;  $\operatorname{Im}(z) = -\frac{3}{2}$ ;  $|z| = \frac{\sqrt{10}}{2} \dots 10p$
- b). Dacă  $z = 2 + i$  - rădăcină a ec  $\Rightarrow z = 2 - i$  - este tot rădăcină a ec. Atunci:  $S = z_1 + z_2 = 4$ ;  $P = z_1 \cdot z_2 = 5$ , scriem ecuația:  $z^2 - 4z + 5 = 0 \Leftrightarrow z^2 - 4z + 5 = 0 \dots 10p$
- c). Cum  $S = 4$  și  $P = 5 \Rightarrow z_1^2 + z_2^2 = (z_1 + z_2)^2 - 2z_1 z_2 =$   
 $= 4^2 - 2 \cdot 5 = 6$ , calculăm  $z_1^4 + z_2^4 = (z_1^2 + z_2^2)^2 - 2z_1^2 z_2^2 =$   
 $= (z_1^2 + z_2^2)^2 - 2 \cdot (z_1 z_2)^2 = 6^2 - 2 \cdot 5^2 = 36 - 2 \cdot 25 = 36 - 50 =$   
 $= -14 \dots 10p$



**GRUP ȘCOLAR OLTCHIM RM. VÂLCEA**  
**CONCURSUL NAȚIONAL TEHNICI MATEMATICE**  
 EDIȚIA A VIII – A / 25 – 27 MARTIE 2011

**Barem de corectare – clasa a XI-a**

**Subiectul I**

a)  $A, B, C$  coliniare  $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3^x & 3^{x+1}-3 & 1 \\ 3^{x+1}-3 & 3^x & 1 \end{vmatrix} = 0 \dots\dots\dots 2p$

$2(3^{x+1}-3) + (3^x)^2 - (3^{x+1}-3)^2 - 2 \cdot 3^x = 0 \dots\dots\dots 2p$

Notăm  $3^x = t, t > 0$  și ecuația devine  $8t^2 - 22t + 15 = 0 \dots\dots\dots 2p$

$t_1 = \frac{3}{2}, t_2 = \frac{5}{4} \dots\dots\dots 2p$

$x_1 = \log_3\left(\frac{3}{2}\right), x_2 = \log_3\left(\frac{5}{4}\right) \dots\dots\dots 2p$

b)  $A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |\Delta| \dots\dots\dots 2p$

$\Delta = \begin{vmatrix} m & m^2 & 1 \\ n & n^2 & 1 \\ p & p^2 & 1 \end{vmatrix} = (p-m)(p-n)(n-m) \dots\dots\dots 2p$

$m, n, p$  sunt numere naturale consecutive, deci  $n = m + 1, p = m + 2 \dots\dots\dots 2p$

$\Delta = 2 \dots\dots\dots 2p$

$A_{\Delta ABC} = 1 \dots\dots\dots 2p$

c)  $A$  simetrică și elementele de pe diagonală egale  $\Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & d \\ c & d & a \end{pmatrix} \dots\dots\dots 2p$

Deoarece  $a + b + c = b + a + d = c + d + a = \lambda$  avem că  $b = c = d$  și  $2c + a = \lambda \dots\dots\dots 2p$

Adică  $b = c = d = \frac{\lambda - a}{2} \dots\dots\dots 1p$

$\det A = \begin{vmatrix} a & \frac{\lambda - a}{2} & \frac{\lambda - a}{2} \\ \frac{\lambda - a}{2} & a & \frac{\lambda - a}{2} \\ \frac{\lambda - a}{2} & \frac{\lambda - a}{2} & a \end{vmatrix} = \frac{\lambda(3a - \lambda)^2}{4} \dots\dots\dots 3p$

Deci  $4\lambda \cdot \det A = [\lambda(3a - \lambda)]^2 \dots\dots\dots 2p$

**Subiectul II**

a)  $\det(A(x)) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \dots\dots\dots 3p$

$= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} - \frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \dots\dots\dots 4p$

$= 1 \dots\dots\dots 3p$



**GRUP ȘCOLAR OLTCHIM RM. VÂLCEA**  
**CONCURSUL NAȚIONAL TEHNICI MATEMATICE**  
 EDIȚIA A VIII – A / 25 – 27 MARTIE 2011

b)  $A(x), A(y) \in M \Rightarrow A(x) = \begin{pmatrix} \frac{e^x + e^{-x}}{2} & 0 & \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{e^x - e^{-x}}{2} & 0 & \frac{e^x + e^{-x}}{2} \end{pmatrix}, A(y) = \begin{pmatrix} \frac{e^y + e^{-y}}{2} & 0 & \frac{e^y - e^{-y}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{e^y - e^{-y}}{2} & 0 & \frac{e^y + e^{-y}}{2} \end{pmatrix}, x, y \in \mathbf{R} \dots\dots 2p$

Prin calcul  $A(x), A(y) \in M \Rightarrow A(x) \cdot A(y) = \begin{pmatrix} \frac{e^{x+y} + e^{-x-y}}{2} & 0 & \frac{e^{x+y} - e^{-x-y}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{e^{x+y} - e^{-x-y}}{2} & 0 & \frac{e^{x+y} + e^{-x-y}}{2} \end{pmatrix} \dots\dots 6p$

Finalizare:  $A(x) \cdot A(y) = A(x+y) \in M \dots\dots 2p$

c) Folosind punctul b) avem că  $A(1) \cdot A(2) \cdot \dots \cdot A(2011) = A(1+2+\dots+2011) = \dots\dots 3p$

$= A_0(2011 \cdot 1006) = \dots\dots 4p$

Finalizare  $\dots\dots 3p$

**Subiectul III**

a)  $f$  este continuă în  $x=0$  dacă  $f(0-0) = f(0+0) = f(0) \Leftrightarrow c=0 \dots\dots 4p$

Din  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{ax^2 + bx}{x^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x^2} = 1 \dots\dots 4p$

Rezultă că  $b=0, a=1 \dots\dots 2p$

b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{2x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{2x+1} - 1}{x} = \dots\dots 3p$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt{x+1} + 1)} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x[\sqrt[3]{(2x+1)^2} + \sqrt[3]{2x+1} + 1]} = \dots\dots 4p$

$= \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{6} \dots\dots 3p$

c)  $D = \mathbf{R} - \{4\} \dots\dots 2p$

$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax^2 + bx + 2}{-x^2 + 4x} = -a \dots\dots 2p$

Dar  $m=3$ , deci  $a=-3 \dots\dots 2p$

$n = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{-3x^2 + bx + 2}{-x + 4} - 3x \right) = -b + 12 \dots\dots 2p$

Dar  $n=-1$ , deci  $b=13 \dots\dots 2p$



GRUP ȘCOLAR OLTCHIM RM. VÂLCEA  
 CONCURSUL NAȚIONAL **TEHNICI MATEMATICE**  
 EDIȚIA A VIII – A / 25 – 27 MARTIE 2011

Barem de corectare – clasa a XII-a

Barem de corectare

Clasa a XII-a

Subiectul I (30p)

1.  $a = -\sqrt[3]{64} = -4$ ;  $b = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{32} = -5$  și  $c = C_2^1 - A_5^1 = -3 \Rightarrow b < a < c \dots 5p$
2. Este necesar ca:  $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \Rightarrow m \in (-8; 0) \dots 5p$
3. Condiția de existență (a radicalului și a logaritmului):  
 $2x^2 + x - 1 > 0$ . Din ecuație obținem:  $\sqrt{2x^2 + x - 1} = 3 \Leftrightarrow$   
 $2x^2 + x - 10 = 0$ , cu soluțiile:  $x_1 = 2$ ;  $x_2 = -\frac{5}{2}$  ambele verificând  
 condiția de existență.  $\dots 5p$
4.  $2; m; 3m - 8 \div \Leftrightarrow 2m = 2 + (3m - 8) \Leftrightarrow m = 6$ .  
 Deci  $a_1 = 2$  și  $r = 4 \Rightarrow a_{10} = a_1 + 9r = 38 \dots 5p$
5. Dacă  $D(x_D, y_D)$  este punctul cerut, atunci  $ABDC$  este  
 paralelogram, deci diagonalele  $(AC)$  și  $(BD)$  au același mijloc.  
 $\Rightarrow \begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases} \Rightarrow D(-5, 0) \dots 5p$
6. Asem:  $\sin 140^\circ = \sin(180^\circ - 40^\circ) = \sin 40^\circ \Rightarrow \sin 140^\circ \cdot \sin 40^\circ =$   
 $= \sin^2 40^\circ$  și  $\cos^2 130^\circ = (-\cos(180^\circ - 50^\circ))^2 = \cos^2 50^\circ = \sin^2(90^\circ - 50^\circ) =$   
 $= \sin^2 40^\circ$ , de aici concluzia  $\dots 5p$

Subiectul II (30p)

1. a)  $A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} \Rightarrow A^t = A$ , deci:  
 $A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 2a^2 - 2a + 1 & 2a - 2a^2 \\ 2a - 2a^2 & 2a^2 - 2a + 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A \cdot A^t \in M \dots 5p$
- b)  $\det A = 1 \Rightarrow a^2 - (1-a)^2 = 1 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow A = I_2 \dots 5p$
- c)  $A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix} \in M_1$  inversabilă  $\Leftrightarrow \det A = 2a - 1 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq \frac{1}{2}$ .  
 $\hat{\text{În acest caz:}} A^{-1} = \frac{1}{2a-1} \cdot \begin{pmatrix} a & a-1 \\ a-1 & a \end{pmatrix} \in M_1 \Leftrightarrow \frac{a}{2a-1} + \frac{a-1}{2a-1} = 1$ ,  
 adevărat pentru oricare  $a \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\} \dots 5p$
2. a)  $f(1) = 0 \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow a \in \{-1; 2\} \dots 5p$
- b) Scriem relațiile lui Viète:  
 $S_1 = 2a; S_2 = 2(a^2 - 1); S_3 = 1$ , deci numă:  $\dots 5p$   
 $\frac{x_1}{x_2 \cdot x_3} + \frac{x_2}{x_1 \cdot x_3} + \frac{x_3}{x_1 \cdot x_2} = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3} = \frac{S_1^2 - 2 \cdot S_2}{S_3} = 4$  nu depinde de  $a$ .
- c) Dacă  $\alpha \in \mathbb{Z}$  este rădăcină a lui  $f$  atunci  $\alpha | -1 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \alpha \in \{-1; 1\}$ .  
 Pentru  $\alpha = 1 \xrightarrow{a)} a = 1$ ; iar pentru  $\alpha = -1 \Rightarrow a^2 + a - 2 = 0 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow a \notin \mathbb{N}$ . Deci  $a = 1 \dots 5p$



GRUP ȘCOLAR OLTCHIM RM. VÂLCEA  
CONCURSUL NAȚIONAL **TEHNICI MATEMATICE**  
EDIȚIA A VIII – A / 25 – 27 MARTIE 2011

Subiectul III (30p)

1. a) Avem:  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - x + 1) = \lim_{x \rightarrow 1} (1 + \ln x) = f(1) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow f$  este continuă în punctul  $x_0 = 1$  ..... 5p

b) Dacă  $x \in (0, 1) \Rightarrow f(x) = x^2 - x + 1 \Rightarrow f_{\min}(x) = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{3}{4}$ ,  
iar dacă  $x \geq 1 \Rightarrow f(x) = 1 + \ln x \geq 1 > \frac{3}{4}$  ..... 5p

c)  $x > 0 \Rightarrow e^x > 1 \Rightarrow f(e^x) = 1 + \ln(e^x) = 1 + x$ . Deci limita  
va fi:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(e^x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1$  ..... 5p

2. a)  $\int g(x) dx = f(x) + C \Leftrightarrow f'(x) = g(x)$  - princip. adevărată... 5p

b) avem:  $h(x) = x \cdot f(e^x) = x \cdot e^x - x^2 \Rightarrow A = \int_1^2 h(x) dx =$   
 $= \int_1^2 (x e^x - x^2) dx = \frac{3e^2 - 7}{3}$  ..... 5p

c)  $\int_1^e f^{2010}(x) \cdot g(x) dx = \int_1^e f^{2010}(x) \cdot f'(x) dx = \frac{f^{2011}(x)}{2011} \Big|_1^e = \frac{(e-1)^{2011} - 1}{2011}$  ..... 5p