GRUP ŞCOLAR **OLTCHIM** RM. VÂLCEA
CONCURSUL NAȚIONAL **TEHNICI MATEMATICE**
EDIȚIA A VIII – A / 25 – 27 MARTIE 2011

Barem de corectare – clasa a IX-a

Barem de corectare Clasa a IX-a

Subiectul I (30p)

a) $x\cdot(y-2)=7 \Rightarrow \begin{cases} x\cdot(y-2)=1\cdot 7 \\ x\cdot(y-2)=(-1)\cdot(-7)\end{cases}$ 3p

$x\cdot(y-2)=1\cdot 7 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y-2=7\end{cases}$ sau $\begin{cases} x=7 \\ y-2=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=9\end{cases}$ sau $\begin{cases} x=7 \\ y=3\end{cases}$ . . . 3p

$x\cdot(y-2)=(-1)\cdot(-7) \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y-2=-7\end{cases}$ sau $\begin{cases} x=-7 \\ y-2=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-5\end{cases}$ sau $\begin{cases} x=-7 \\ y=1\end{cases}$ . . . 4p

b) $S_n=\left(\frac{1}{4}\right)^n\cdot S$

Cum: $S=10.000$ și $n=5 \Rightarrow S_5=\left(\frac{1}{4}\right)^5\cdot 10000$ 10p

c) $f(x)=|x+1|+x$ 2p

$f(x)=\begin{cases} 2x+1, & x\geq -1 \\ -1, & x<-1\end{cases}$ 4p

Reprezentarea grafică 4p

Subiectul II (30p)

a) $x=y=0$ 10p

b) $\vec{w}=x\cdot\vec{u}+y\cdot\vec{v}=x\cdot(3\vec{a}+5\vec{b})+y\cdot(2\vec{a}-3\vec{b})=$ 3p

$=(3x+2y)\cdot\vec{a}+(5x-3y)\cdot\vec{b}$ și $\vec{w}=\vec{a}+3\vec{b}$ 3p

$\Rightarrow x=\frac{9}{19}$; $y=-\frac{4}{19} \Rightarrow \vec{w}=\frac{9}{19}\cdot\vec{u}-\frac{4}{19}\cdot\vec{v}$ 4p

c) analog b), dacă $\vec{a}=x\vec{u}+y\cdot\vec{v} \Rightarrow$

$\Rightarrow x=\frac{3}{19}$ și $y=\frac{5}{19} \Rightarrow \vec{a}=\frac{3}{19}\cdot\vec{u}+\frac{5}{19}\cdot\vec{v}$ 5p

La fel deducem: $\vec{b}=\frac{2}{19}\cdot\vec{u}-\frac{3}{19}\cdot\vec{v}$ 5p

Subiectul III (30p)

a) $f\circ g=\begin{cases} 4, & x\leq 0 \\ -2, & x\in(0,1) \\ -2x-a+1, & x\in(1,3) \\ 2, & x\geq 3\end{cases}$; $g\circ f=\begin{cases} 3, & x\leq 1 \\ -2x+2+a, & x\in(1,3) \\ -2, & x\geq 3\end{cases}$

$a\geq 1$ 10p

b) Reprezentarea grafică f 5p

g 5p

c) Avem inegalitatea:

$1\leq \frac{n+\sqrt{n+1}}{n}<2$, $(\forall)\, n\in\mathbb{N}$ și $n\geq 2$ 4p

$\Rightarrow \left[\frac{1+\sqrt{2}}{1}\right]+\left[\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right]+\ldots+\left[\frac{2010+\sqrt{2011}}{2010}\right]=2010$ . . . 6p.

Barem de corectare – clasa a X-a

Barem de corectare — Clasa a X-a

Subiectul I (30p)

a) Folosim inegalitatea: $|a|+|b| \geq |a-b|, (\forall) a,b \in \mathbb{R} \Rightarrow$
$\Rightarrow (|x-2009|+|x-2010|)+(|x-2011|+|x-2012|) \geq |1|+|1| = 2$ . . . 15p

b) Ecuația este echivalentă cu: $2^{\log_6\left(x+\frac{9}{x}\right)} = 8 - \frac{9}{x} - x \Leftrightarrow$
$2^{\log_6\left(x+\frac{9}{x}\right)} = 8 - \left(x+\frac{9}{x}\right)$ — — — — — — 15p

C.E. $x + \frac{9}{x} > 0 \Rightarrow x > 0$. Notăm: $x + \frac{9}{x} = t > 0 \Rightarrow 2^{\log_6 t} = 8 - t \Rightarrow$
$\Rightarrow t = 6$ – este soluție unică $\Rightarrow x = 3$

Subiectul II (30p)

Luăm $x = 3 \Rightarrow f^2(3) - 6\cdot f(3) + 10 = 0 \; (1)$ — — — — . 15p
Dar: $f^2(3) - 6\cdot f(3) + 10 = (f(3)-3)^2 + 1 \geq 1 \; (2)$ — — — 15p
Din (1) și (2) $\Rightarrow$ contradicție $\Rightarrow (\nexists) f$

Subiectul III (30p)

a) $z = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i \Rightarrow Re(z) = -\frac{1}{2}$; $Im(z) = -\frac{3}{2}$; $|z| = \frac{\sqrt{10}}{2}$ — — — 10p

b). Dacă $z = 2+i$ – rădăcină a ec $\Rightarrow z = 2-i$ – este tot rădăcină a ec. Atunci: $S = z_1 + z_2 = 4$; $P = z_1 \cdot z_2 = 5$, scriem ecuația: $z^2 - S\cdot z + P = 0 \Leftrightarrow z^2 - 4z + 5 = 0$ — — — — — — . 10p

c). Cum $S = 4$ și $P = 5 \Rightarrow z_1^2 + z_2^2 = (z_1+z_2)^2 - 2z_1z_2 =$
$= 4^2 - 2\cdot 5 = 6$, calculăm $z_1^4 + z_2^4 = (z_1^2+z_2^2)^2 - 2\cdot z_1^2\cdot z_2^2 =$
$= (z_1^2+z_2^2)^2 - 2\cdot(z_1z_2)^2 = 6^2 - 2\cdot 5^2 = 36 - 2\cdot 25 = 36 - 50 =$
$= -14$ — — — — — — — — — — — — 10p

GRUP ŞCOLAR **OLTCHIM** RM. VÂLCEA

CONCURSUL NAȚIONAL **TEHNICI MATEMATICE**

EDIȚIA A VIII – A / 25 – 27 MARTIE 2011

Barem de corectare – clasa a XI-a

Subiectul I

a) A, B, C coliniare $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3^x & 3^{x+1}-3 & 1 \\ 3^{x+1}-3 & 3^x & 1 \end{vmatrix} = 0$ ………………………………………… 2p

$2\left(3^{x+1}-3\right)+\left(3^x\right)^2-\left(3^{x+1}-3\right)^2-2\cdot 3^x=0$ ………………………………………….. 2p

Notăm $3^x = t, t > 0$ şi ecuația devine $8t^2-22t+15=0$ …………………………………2p

$t_1 = \dfrac{3}{2}, t_2 = \dfrac{5}{4}$ ……………………………………………………………………2p

$x_1 = \log_3\left(\dfrac{3}{2}\right), x_2 = \log_3\left(\dfrac{5}{4}\right)$ ……………………………………………………………2p

b) $A_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}|\Delta|$ ……………………………………………………………………2p

$\Delta = \begin{vmatrix} m & m^2 & 1 \\ n & n^2 & 1 \\ p & p^2 & 1 \end{vmatrix} = (p-m)(p-n)(n-m)$ ………………………………………………2p

m, n, p sunt numere naturale consecutive, deci $n = m+1, p = m+2$ ……………………...2p

$\Delta = 2$ ………………………………………………………………………………………2p

$A_{\Delta ABC} = 1$ ……..…………………………………………………………………………2p

c) A simetrică şi elementele de pe diagonală egale $\Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & d \\ c & d & a \end{pmatrix}$ …………………….. 2p

Deoarece $a+b+c = b+a+d = c+d+a = \lambda$ avem că $b = c = d$ şi $2c + a = \lambda$ ..……………..2p

Adică $b = c = d = \dfrac{\lambda - a}{2}$ ….……………………………………………………………1p

$$\det A = \begin{vmatrix} a & \dfrac{\lambda-a}{2} & \dfrac{\lambda-a}{2} \\ \dfrac{\lambda-a}{2} & a & \dfrac{\lambda-a}{2} \\ \dfrac{\lambda-a}{2} & \dfrac{\lambda-a}{2} & a \end{vmatrix} = \frac{\lambda(3a-\lambda)^2}{4}$$ ……………………………………………..3p

Deci $4\lambda \cdot \det A = \left[\lambda(3a-\lambda)\right]^2$ ………………………………………………………2p

Subiectul II

a) $\det\left(A(x)\right) = \left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2 =$ ……..…..…………………………………………..…...3p

$= \left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{2} + \dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\right)\left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{2} - \dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\right) =$ ………………………………………………4p

$= 1$ ……………………………………………………………………………………………3p

b) $A(x), A(y) \in M \Rightarrow A(x) = \begin{pmatrix} \frac{e^x+e^{-x}}{2} & 0 & \frac{e^x-e^{-x}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{e^x-e^{-x}}{2} & 0 & \frac{e^x+e^{-x}}{2} \end{pmatrix}, A(y) = \begin{pmatrix} \frac{e^y+e^{-y}}{2} & 0 & \frac{e^y-e^{-y}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{e^y-e^{-y}}{2} & 0 & \frac{e^y+e^{-y}}{2} \end{pmatrix}, x, y \in \mathbf{R}$ …….2p

Prin calcul $A(x), A(y) \in M \Rightarrow A(x) \cdot A(y) = \begin{pmatrix} \frac{e^{x+y}+e^{-x-y}}{2} & 0 & \frac{e^{x+y}-e^{-x-y}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{e^{x+y}-e^{-x-y}}{2} & 0 & \frac{e^{x+y}+e^{-x-y}}{2} \end{pmatrix}$ ………………………6p

Finalizare: $A(x) \cdot A(y) = A(x+y) \in M$ ……………………………………………………………2p

c) Folosind punctul b) avem că $A(1) \cdot A(2) \cdot ... \cdot A(2011) = A(1+2+...+2011) =$ …………………. 3p

$= A_0(2011 \cdot 1006) =$ ………………………………………………………………………..4p

Finalizare ..……………………………………………………………………………3p

Subiectul III

a) f este continuă în $x=0$ dacă $f(0-0) = f(0+0) = f(0) \Leftrightarrow c = 0$ ……………………...…4p

Din $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{ax^2+bx}{x^2} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2} = 1$ ………………………………………………………..4p

Rezultă că $b=0, a=1$ ………………………………………………………………………..2p

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{2x+1}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} - \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{2x+1}-1}{x} =$ …………………..………………3p

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)} - \lim\limits_{x\to 0} \frac{2x}{x\left[\sqrt[3]{(2x+1)^2}+\sqrt[3]{2x+1}+1\right]} =$ …………………..………………3p

$= \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{6}$ …………………..…………………………………………………3p

c) $D = \mathbf{R} - \{4\}$ ……………………………………………………………………2p

$m = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{ax^2+bx+2}{-x^2+4x} = -a$ ………………………………………..…………...2p

Dar $m=3$, deci $a=-3$ ……………………………………………………………………...2p

$n = \lim\limits_{x\to -\infty} \left[f(x) - x\right] = \lim\limits_{x\to -\infty} \left(\frac{-3x^2+bx+2}{-x+4} - 3x \right) = -b+12$ ………………………………..2p

Dar $n=-1$, deci $b=13$ ……………………………………………………………………...2p

Barem de corectare – clasa a XII-a

Barem de corectare — Clasa a XII-a

Subiectul I (30p)

1. $a = -\sqrt[3]{64} = -4$; $b = \log_{\sqrt{2}} \frac{1}{32} = -5$ și $c = C_2^1 - A_5^1 = -3 \Rightarrow b < a < c$ ... 5p

2. Este necesar ca: $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \Rightarrow m \in (-8; 0)$ - - - - - - - - - - - 5p

3. Condiția de existență (a radicalului și a logaritmului): $2x^2 + x - 1 > 0$. Din ecuație obținem: $\sqrt{2x^2+x-1} = 3 \Leftrightarrow 2x^2 + x - 10 = 0$, cu soluțiile: $x_1 = 2$; $x_2 = -\frac{5}{2}$ ambele verificând condiția de existență. - - - - - - - - - - 5p

4. $2; m; 3m-8 \div \Leftrightarrow 2m = 2 + (3m-8) \Leftrightarrow m = 6$.
Deci $a_1 = 2$ și $r = 4 \Rightarrow a_{10} = a_1 + 9r = 38$ - - - - - - - 5p

5. Dacă $D(x_D, y_D)$ este punctul cerut, atunci $ABDC$ este paralelogram, deci diagonalele (AC) și (BD) au același mijloc
$\Rightarrow \begin{cases} x_A + x_D = x_B + x_C \\ y_A + y_D = y_B + y_C \end{cases} \Rightarrow D(-5, 0)$ 5p

6. Avem: $\sin 140^\circ = \sin(180^\circ - 140^\circ) = \sin(40^\circ) \Rightarrow \sin 140^\circ \cdot \sin 40^\circ = \sin^2 40^\circ$ și $\cos^2 130^\circ = (-\cos(180^\circ - 130^\circ))^2 = \cos^2 50^\circ = \sin^2(90^\circ - 50^\circ) = \sin^2 40^\circ$, de aici concluzia - - - - - - - - - - 5p

Subiectul II (30p)

1. a) $A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} \Rightarrow A^t = A$, deci:
$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 2a^2-2a+1 & 2a-2a^2 \\ 2a-2a^2 & 2a^2-2a+1 \end{pmatrix} \Rightarrow A \cdot A^t \in M$ - - - - - - - - - 5p

b) $\det A = 1 \Rightarrow a^2 - (1-a)^2 = 1 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow A = I_2$ - - - - - - - 5p

c) $A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix} \in M$ inversabilă $\Leftrightarrow \det A = 2a - 1 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq \frac{1}{2}$.
În acest caz: $A^{-1} = \frac{1}{2a-1} \cdot \begin{pmatrix} a & a-1 \\ a-1 & a \end{pmatrix} \in M \Leftrightarrow \frac{a}{2a-1} + \frac{a-1}{2a-1} = 1$, adevărat pentru oricare $a \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ - - - - - - - - 5p

2. a) $f(1) = 0 \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow a \in \{-1; 2\}$ - - - - - - - 5p

b) Scriem relațiile lui Viète:
$S_1 = 2a$; $S_2 = 2(a^2-1)$; $S_3 = 1$, deci suma: - - - - - 5p
$\frac{x_1}{x_2 \cdot x_3} + \frac{x_2}{x_1 \cdot x_3} + \frac{x_3}{x_1 \cdot x_2} = \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3} = \frac{S_1^2 - 2 \cdot S_2}{S_3} = 4$ nu depinde de a.

c) Dacă $\alpha \in \mathbb{Z}$ este rădăcină a lui f atunci $\alpha \mid -1 \Rightarrow \alpha \in \{-1; 1\}$.
Pentru $\alpha = 1 \overset{a)}{\Rightarrow} a = 1$; iar pentru $\alpha = -1 \Rightarrow a^2 + a - 1 = 0 \Rightarrow a \notin \mathbb{N}$. Deci $a = 1$. - - - - - - - - - - 5p

Subiectul III (30p)

1. a) Avem: $\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} (x^2-x+1) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x\geq 1}} (1+\ln x) = f(1) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ este continuă în punctul $x_0 = 1$ - - - - - - - . 5p

b) Dacă $x \in (0,1) \Rightarrow f(x) = x^2-x+1 \geq f_{min}(x) = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{3}{4}$,
iar dacă $x \geq 1 \Rightarrow f(x) = 1+\ln x \geq 1 > \frac{3}{4}$ - - - - - - - .. 5p

c) $x>0 \Rightarrow e^x > 1 \Rightarrow f(e^x) = 1+\ln(e^x) = 1+x$. Deci limita va fi: $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{f(e^x)-1}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{x}{x} = 1$ - - - - - - - - . 5p

2. a) $\int g(x)\,dx = f(x) + C \Leftrightarrow f'(x) = g(x)$ – prop. adevărată ... 5p

b) avem: $h(x) = x\cdot f(e^x) = x\cdot e^x - x^2 \Rightarrow A = \int_1^2 h(x)\,dx =$
$= \int_1^2 (xe^x - x^2)\,dx = \frac{3e^2-7}{3}$ - - - - - - - - - ... 5p

c) $\int_1^e f^{2010}(x)\cdot g(x)\,dx = \int_1^e f^{2010}(x)\cdot f'(x)\,dx = \frac{f^{2011}(x)}{2011}\Big|_1^e = \frac{(e-1)^{2011}-1}{2011}$ ... 5p