Concursul "Gheorghe Titeica" 2011

CLASA a VI-a

"Această mare e acoperită de adolescenţi
care învaţă mersul pe valuri, în picioare....
Eu stau pe plaja-ntinsă tăiată-n *unghi* perfect
şi îi contemplu ca la o debarcare." - Nichita Stănescu

1) *Dispunem de o riglă negradată şi un raportor de pe care s-au şters toate semnele care indicau gradele, cu excepţia semnului* $11°$. *Explicaţi cum putem desena unghiurile de* $1°, 2°, 3°, ..., 179°$.

"În dulcele stil clasic"

2) *Pe laturile* AB *şi* AC *ale triunghiului* ABC *se consideră punctele* M *şi* N, *respectiv* P *şi* Q, $M \in [AN]$, *astfel încât* $AM = AP$ *şi* $AN = AQ$. *Dacă* $\{R\} = MQ \cap NP$, *să se arate că punctul* R *se află pe bisectoarea interioară a unghiului* $\sphericalangle BAC$.

"Atâtea clăile de fire stângi!
Găsi-vor gest închis, să le rezume,
Să nege, dreaptă, linia ce frângi:
Ochi în virgin triunghi tăiat spre lume?" - Ion Barbu

3) *Fie* ABC *un triunghi ascuţitunghic şi punctele* M, P, Q *în planul triunghilui* ABC. *Dacă unghiurile* MAC, MBC, PAB, PCB, QBA *şi* QCA *sunt de* $90°$, *arătaţi că:*

a) segmentele $[AQ]$ *şi* $[BP]$ *au acelaşi mijloc;* *b) triunghiurile* ABC *şi* QPM *sunt congruente.*

CLASA a VII-a

"Două linii paralele se întâlnesc la infinit - cred şi ele în aceasta." - Stanislaw Lec

1) *Fie triunghiul* ABC *având laturile de lungimi* a, b *şi* c, *iar* $D \in (BC)$. *Paralelele din* D *la* AB *şi* AC *taie aceste laturi în* E *şi* F $(E \in (AC), F \in (AB))$.

a) Să se afle lungimea segmentelor $[BD]$ *şi* $[DC]$ *în funcţie de* a, b *şi* c *astfel încât perimetrele triunghiurilor* ABD *şi* ADC *să fie egale.*

b) Să se arate că

$$\frac{S_{BFD}}{S_{AFD}} + \frac{S_{CDE}}{S_{ADE}} \geqslant 2.$$

"O problemă cu greutate!"

2) *Se consideră un triunghi* ABC. *Fie* A' *simetricul lui* A *faţă de* B, B' *simetricul lui* B *faţă de* C *şi* C' *simetricul lui* C *faţă de* A. *Fie* A'', D, E *mijloacele laturilor* $B'C', BC$, respectiv AC. *Să se arate că:*

a) Punctele A'', D *şi* E *sunt coliniare;* *b) Triunghiurile* ABC *şi* $A'B'C'$ *au acelaşi centru de greutate.*

"Nu te poţi rupe în două ci numai în trei,
nu ocolirea, ci ruptura închide.
Triunghiul, vă zic dragii mei,
e izbăvirea unei oglinde." - Nichita Stănescu

3) *În triunghiul neisoscel* ABC *există punctele* $M, N \in (BC)$ *astfel încât* $N \in (BM)$, $M \in (NC)$ *şi* $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle ANB \equiv \sphericalangle AMC$. *Bisectoarele unghiurilor* $\sphericalangle ABC$ *şi* $\sphericalangle ACB$ *intersectează* $[AM]$, *respectiv* $[AN]$, *în* X, *respectiv* Y. *Ştiind că* $XY \parallel BC$, *determinaţi* $m(\sphericalangle BAC)$. (Eventual se poate utiliza şi faptul că $\cos 90° = 0$ şi $\cos 120° = -1/2$).

Clasa a VIII-a

1) *Fie* $ABCDA'B'C'D'$ *un cub cu muchiile de lungime 12, iar punctele* M *şi* N *sunt situate pe segmentele* BB' *şi* DD' *astfel încât*

$$\frac{BM}{BB'} = \frac{1}{4} \text{ şi } \frac{DN}{DD'} = \frac{2}{3}.$$

Cătălin Barbu, Bacău

Să se determine aria secţiunii determinate de planul (AMN) *în cubul dat.*

2) *Fie* ABC *un triunghi dreptunghic. Considerăm punctele* $D \in AB, E \in AC$ *astfel încât* $\widehat{AED} \equiv \widehat{ABC}$ *şi punctele* $F, G \in (BC)$ *şi* $H \in (AC)$, $K \in (AB)$ *astfel încât* FH *şi* GK *sunt perpendiculare pe* BC. *Demonstraţi că punctele* D, E, F, G, H, K *sunt conciclice dacă şi numai dacă* $DE \equiv FH \equiv GK$.

Ion Patraşcu, Craiova

3) *Două mulţimi de câte trei puncte se numesc "mulţimi asemenea" dacă şi numai dacă există două triunghiuri asemenea, unul cu vârfurile din prima mulţime, iar celălalt cu vârfurile din a doua mulţime. Fie punctele necoliniare* A, B, C, *iar* $D \in (BC)$.

a) Dacă mulţimile $\{A, B, D\}$ *şi* $\{A, B, C\}$ *sunt mulţimi "asemenea", atunci* $AB^2 = BC \cdot BD$.

b) Dacă perechile de mulţimi $\{A, B, D\}$ *şi* $\{A, B, C\}$, *respectiv* $\{A, C, D\}$ *şi* $\{A, B, C\}$, *sunt simultan "mulţimi asemenea", atunci triunghiul* ABC *este dreptunghic.*

Ovidiu Pop, Satu Mare