Concursul Naţional de Matematică "Arhimede"
Ediţia a VIII-a, Etapa finală 9 aprilie 2011
Clasa a XII-a

I. Fie $f : R \to R$, $f(x) = (arctg\, x)^2 - \dfrac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}$, $x \in R$.

Notăm $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, $x \in R$.

Să se calculeze:

(4p) **1)** $F(1)$

(5p) **2)** $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{F(x)}{x}$

Prof. Dan Popescu

II. Fie $\mathcal{M}$ mulţimea matricilor $P \in M_3(R)$ de forma

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{cu } a,b,c \in R,\ b \neq 0.$$

(5p) 1) Arătaţi că $\mathcal{M}$ înzestrată cu înmulţirea matricilor este grup.

(4p) 2) Este comutativ acest grup?

Prof. Lenuţa Pîrlog

III. Fie $f : R \to R$ o funcţie periodică de perioadă $T > 0$, care admite primitive. Notăm cu F o primitivă a funcţiei *f*. Considerăm funcţiile:

$$G(x) = F(x) - \frac{F(T) - F(0)}{T} \cdot x,\ x \in R$$

$$H_n(x) = F(nx) - F(x) - f(x) \cdot \frac{(n-1)T}{2},\ x \in R,\ n \in N^*.$$

Să se arate că:

(3p) **1)** $G(x+T) = G(x)$, $(\forall)\ x \in R$

(3p) **2)** $\int_0^T G(nx)dx = \int_0^T G(x)dx$, $n \in N^*$.

(3p) **3)** $\int_0^T H_n(x)dx = 0$, $n \in N^*$

Marius Drăgan

IV. *(9p)* Să se determine toate numerele naturale $n \geq 2$ cu proprietatea că orice inel $(A,+,\cdot)$ cu n elemente este izomorf cu inelul $(Z_n,+,\cdot)$.

Sorin Rădulescu, Marius Rădulescu

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se notează de la 1 p din oficiu la 10p. Timp de lucru 3 ore.