



Concursul Național de Matematică "Arhimede"  
Ediția a VIII-a, Etapa finală 9 aprilie 2011  
Clasa a XII-a

I. Fie  $f: R \rightarrow R$ ,  $f(x) = (\operatorname{arctg} x)^2 - \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}$ ,  $x \in R$ .

Notăm  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ ,  $x \in R$ .

Să se calculeze:

(4p) 1)  $F(1)$

(5p) 2)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{x}$

Prof. Dan Popescu

II. Fie  $\mathcal{M}$  mulțimea matricilor  $P \in M_3(R)$  de forma

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ cu } a, b, c \in R, b \neq 0.$$

(5p) 1) Arătați că  $\mathcal{M}$  înzestrată cu înmulțirea matricilor este grup.

(4p) 2) Este comutativ acest grup?

Prof. Lenuța Pîrlog

III. Fie  $f: R \rightarrow R$  o funcție periodică de perioadă  $T > 0$ , care admite primitive. Notăm cu  $F$  o primitivă a funcției  $f$ . Considerăm funcțiile:

$$G(x) = F(x) - \frac{F(T) - F(0)}{T} \cdot x, \quad x \in R$$

$$H_n(x) = F(nx) - F(x) - f(x) \cdot \frac{(n-1)T}{2}, \quad x \in R, n \in N^*.$$

Să se arate că:

(3p) 1)  $G(x+T) = G(x)$ ,  $(\forall) x \in R$

(3p) 2)  $\int_0^T G(nx) dx = \int_0^T G(x) dx$ ,  $n \in N^*$ .

(3p) 3)  $\int_0^T H_n(x) dx = 0$ ,  $n \in N^*$

Marius Drăgan

IV. (9p) Să se determine toate numerele naturale  $n \geq 2$  cu proprietatea că orice inel  $(A, +, \cdot)$  cu  $n$  elemente este izomorf cu inelul  $(Z_n, +, \cdot)$ .

Sorin Rădulescu, Marius Rădulescu

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se notează de la 1 p din oficiu la 10p. Timp de lucru 3 ore.