Concursul Naţional de Matematică "Arhimede"
Ediţia a VIII-a, Etapa finală 9 aprilie 2011
Clasa a XI-a

I. Se consideră funcţia

$$f : R \to R,\ f(x) = (x+1)\cdot \lim_{n\to\infty} \frac{x^n - 1}{x^{2n}+1},\ x \in R.$$

1) *(3p)* Să se calculeze: $f\left(-\frac{1}{2}\right)$, $f(0)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(2)$.

2) *(3p)* Să se studieze continuitatea funcţiei *f*.

3) *(3p)* Să se studieze derivabilitatea funcţiei *f*.

II. Fie $a, b, c \in R$, $b \neq 1$. Considerăm matricea

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) *(4p)* Să se arate că există două matrici $A, B \in M_3(R)$ astfel încât $P^h = A + b^h B$ pentru orice $k \in N$.

2) *(5p)* Să se determine matricile *A* şi *B*.

III. *(9p)* Fie $A, B \in M_n(R)$ şi $n \geq 3$ astfel încât $AB^* = BA$. Să se arate că dacă *A* e nesingulară, atunci $(AB)^2 = (BA)^2$.

Gabriel Dospinescu

IV. *(9p)* Fie $n \in N^*$ şi funcţia $f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to R$ definită prin $f(x) = \frac{1}{\cos^n x}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Să se demonstreze că $f^{(k)}(x) > 0$, $(\forall)\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $(\forall)\ k \in N$.

Sorin Rădulescu, Marius Rădulescu

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se notează de la 1 p din oficiu la 10p. Timp de lucru 3 ore.