



Concursul Național de Matematică "Arhimede"
Ediția a VIII-a, Etapa finală 9 aprilie 2011
Clasa a X-a

I. Considerăm numerele reale

$$u = \sqrt[3]{\sqrt{325} + 18}, \quad v = \sqrt[3]{\sqrt{325} - 18}, \quad x = u - v.$$

- 1) (3p) Să se calculeze $y = u^3 - v^3$ și $z = u \cdot v$
- 2) (3p) Să se arate că x satisface ecuația: $x^3 + 3x - 36 = 0$
- 3) (3p) Să se stabilească dacă x este rațional sau irațional.

Prof. Viorel Zlate

II. (9p) Fie $a, b \in \mathbb{C}$ cu proprietatea că $\overline{ab} \neq 1$. Să se arate că

$$(1 - |a|)(1 - |b|) \left(1 - \left| \frac{a-b}{1-\overline{ab}} \right| \right) \geq 0.$$

III. Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ notăm cu $[x]$ partea întreagă a lui x și cu $\{x\} = x - [x]$ partea fracționară a sa. Fie $a, b \geq 0$ cu $a + b = 1$. Considerăm funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = [x] + a\{x\}^2 + b\{x\}$, $x \in \mathbb{R}$ și $g(x) = [x] + \{x\}^n$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

- 1) (5p) Să se arate că funcția f este bijectivă și să se calculeze inversa sa.
- 2) (4p) Să se arate că funcția g este bijectivă și să se calculeze inversa.

Prof. Dana Paponiu

IV. (9p) Fie z_1, z_2, z_3 numere complexe de modul 1 cu următoarele proprietăți:

- 1) $z_1 + z_2 + z_3 \in \mathbb{Z}$
- 2) $z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 \in \mathbb{Z}$
- 3) $z_1 z_2 z_3 \in \mathbb{Z}$.

Să se demonstreze că $z_1^{12} = z_2^{12} = z_3^{12} = 1$.

Sorin Rădulescu, Mihai Piticari

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se notează de la 1 p din oficiu la 10p. Timp de lucru 3 ore.