Concursul Naţional LAURENŢIU PANAITOPOL
14 mai 2011, Tulcea

CLASA a XI-a

Problema 1. Fie $p > 0$ un număr real şi fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie periodică cu proprietatea că există $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^p}$, nu neapărat finită. Să se demonstreze că funcţia f este mărginită.

Problema 2. Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $A^2 + B^2 = AB$ şi $BA = O_2$. Să se demonstreze că $AB = O_2$.

Problema 3. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Să se determine matricele $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât

$$X^n + X^{n-2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Laurenţiu Panaitopol

Problema 4. Să se determine funcţiile derivabile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că pentru orice numere reale distincte x şi y avem

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \geqslant \max(f'(x), f'(y)).$$

Problema 1. [*Marcelina Popa, Tulcea*]

Fie $p > 0$ un număr real şi fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie periodică cu proprietatea că există $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^p}$, nu neapărat finită. Să se demonstreze că funcţia f este mărginită.

Soluţie. Fie $T > 0$ o perioadă a funcţiei f. Notăm:

$$L = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^p}$$

Alegând $x_n = nT \to \infty$ obţinem:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{f(nT)}{(nT)^p} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(0)}{(nT)^p} = 0.$$

Presupunem prin absurd că funcţia f este nemărginită. Rezultă atunci că şi restricţia lui f la intervalul $[0, T)$ este nemăginită, deci pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, va exista $a_n \in [0, T)$, astfel încât $f\,(a_n) > n^p$.

Notăm $y_n = a_n + nT \to \infty$. Din ipoteză rezultă că:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{f(y_n)}{(y_n)^p} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(a_n + nT)}{(a_n + nT)^p} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(a_n)}{(a_n + nT)^p}.$$

Dar $f\,(a_n) > n^p$ şi $a_n < T$. Urmează atunci că:

$$\frac{f(a_n)}{(a_n + nT)^p} > \frac{n^p}{(T + nT)^p}.$$

Trecând la limită, obţinem:

$$L \geq \lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{(T + nT)^p} = \frac{1}{T^p},$$

în contradicţie cu $L = 0$. Aşadar funcţia f este mărginită.

Problema 2. [*Dinu Şerbănescu*]

Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $A^2 + B^2 = AB$ şi $BA = O_2$. Să se demonstreze că $AB = O_2$.

Soluţie. Dacă A este inversabilă, din $BA = O_2$ rezultă $B = O_2$, deci $AB = O_2$. Analog dacă B este inversabilă.

Dacă A şi B sunt neinversabile, atunci $A^2 = aA$ şi $B^2 = bB$, unde $a = \mathrm{tr}A$ şi $b = \mathrm{tr}B$. Obţinem $aA + bB = AB$, de unde prin înmulţire cu B la stânga rezultă $bB^2 = O_2$. De aici $B^2 = O_2$ sau $b = 0$; ultima egalitate atrage din nou $B^2 = O_2$.

Înmulţim la dreapta cu B în relaţia $aA + bB = AB$ pentru a obţine $aAB = O_2$. Dacă $a = 0$, atunci $A^2 = O_2$ şi apoi $AB = A^2 + B^2 = O_2 + O_2 = O_2$; altfel $AB = O_2$, ceea ce trebuia arătat.

Problema 3. [**Laurenţiu Panaitopol**]

Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Să se determine matricele $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât

$$X^n + X^{n-2} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soluţie. Avem $\det(X^{n-2})\det(X^2 + I_2) = 0$, deci $\det X = 0$ sau $\det(X^2 + I_2) = 0$.

În al doilea caz se obţine $X^2 + I_2 = O_2$, de unde $X^n + X^{n-2} = O_2$, fals. Rămâne $\det X = 0$, de unde $X^2 = tX$, unde t este urma matricei X. Cum $X^k = t^{k-1}X$, ecuaţia devine $(t^{n-1} + t^{n-3})X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Egalând urmele matricelor din cei doi membri rezultă $t^n + t^{n-2} = 2$. Ecuaţia are unică rădăcină reală $t = 1$ dacă n este impar, de unde

$$X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix};$$

în cazul n par avem rădăcinile $t = \pm 1$ de unde

$$X = \pm\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Problema 4. [*Dinu Şerbănescu*]

Să se determine funcţiile derivabile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că pentru orice numere reale distincte x şi y avem

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \geqslant \max(f'(x), f'(y)). \tag{1}$$

Soluţie. Considerăm funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - f(0) - xf'(0)$. Se constată uşor că funcţia g este derivabilă şi verifică inegalitatea (1). În plus, $g(0) = g'(0) = 0$, ceea ce atrage

$$\frac{g(x)}{x} \geqslant \max(g'(x), 0).$$

De aici rezultă că $g(x) \geqslant 0, \forall x \geqslant 0$ şi $xg'(x) - g(x) \leqslant 0, \forall x > 0$. Obţinem că funcţia $x \mapsto \dfrac{g(x)}{x}$ are derivata negativă pe $(0, \infty)$, deci este descrescătoare pe acest interval. Cum $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{x} = g'(0) = 0$, rezultă $g = 0$ pe $[0, \infty)$. Consideraţii analoage arată că funcţia g este identic nulă, deci funcţiile cerute sunt $f(x) = ax + b$, cu $a, b \in \mathbb{R}$ arbitrare.